POLITECHNIKA POZNAŃSKA WYDZIAŁ INŻYNIERII MECHANICZNEJ



Belki na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach

mgr inż. Iwona Wstawska

Promotor rozprawy:

prof. dr hab. inż. Krzysztof Magnucki

Poznań 2020

Podziękowania

Dziękuję mojemu Promotorowi, prof. dr hab. inż. Krzysztofowi Magnuckiemu, za poświęcony czas, pomoc oraz cenne uwagi związane z niniejszą rozprawą doktorską, a także za wsparcie i wyrozumiałość.

Dziękuję także promotorowi pomocniczemu, dr inż. Piotrowi Kędzi, za wyjaśnienie wielu kwestii naukowych, pomoc, poświęcony czas, a przede wszystkim za życzliwość i serdeczność.

Składam również serdeczne podziękowania dla wszystkich pracowników Zakładu Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Poznańskiej, którzy przyczynili się do powstania niniejszej pracy.

Szczególne podziękowania składam mojej mamie oraz przyjaciołom, bez ich wsparcia ta praca by nie powstała.

Spis treści

Streszczenie	4
Abstract	5
Wykaz ważniejszych oznaczeń	6
Wstęp	7
1. Przegląd literatury	7
1.1. Modele konstrukcji na podłożu sprężystym	7
1.2. Belki jednorodne na podłożu sprężystym	
1.3. Belki trójwarstwowe na podłożu sprężystym	
2. Cel i zakres pracy	
Główne tezy rozprawy	
3. Badania analityczne	
3.1. Belki jednorodne na podłożu sprężystym	
3.2. Belki trójwarstwowe na podłożu sprężystym	
4. Badania numeryczne	
4.1. Belki jednorodne na podłożu sprężystym	
4.2. Belki trójwarstwowe na podłożu sprężystym	
Podsumowanie i wnioski końcowe	
Kierunki dalszych badań	
Spis rysunków	
Spis tabel	
Literatura	

Streszczenie

Problemy dotyczące współpracy podłoża i spoczywających na nim konstrukcji stanowią istotny aspekt analizy wytrzymałościowej. Badania dotyczące m.in. wyboczenia belek na podłożu sprężystym zostały przeprowadzone przez wielu autorów. W literaturze światowej można znaleźć kilka, a nawet kilkanaście modeli matematycznych opisujących zachowanie się belek na podłożu sprężystym. Niemniej jednak większość modeli jest zbyt skomplikowanych aby mogły być one stosowane w prostych zagadnieniach inżynierskich. Klasyfikacja modeli podłoża sprężystego została w niniejszej pracy przedstawiona w pozycjach [1–4, 39].

W pracy przedstawiono matematyczną analizę stabilności belek jednorodnych i trójwarstwowych na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach geometrycznych podłoża, podpartych przegubowo. Model analityczny dotyczył belek poddanych ściskaniu w płaszczyznach osiowych. Założono funkcję określającą kształt podłoża sprężystego. Ponadto założono oryginalną funkcję ugięcia. Wyznaczono wzór na siłę krytyczną ściskanej belki jedno- i trójwarstwowej, a także dokonano przykładowych obliczeń. Dokonano analizy porównawczej wyników dla belek jednorodnych i trójwarstwowych na podłożu sprężystym.

Dopełnieniem prowadzonych badań są wyniki obliczeń modeli belek przy użyciu metody elementów skończonych w programie SolidWorks. Wyznaczono numeryczne wartości obciążeń krytycznych dla wybranych rodzin belek. Analiza porównawcza dotyczyła wyników otrzymanych metodami analitycznymi i numerycznymi.

Wnioski końcowe zawarte w podsumowaniu pracy tworzą praktyczny obraz charakterystyki analizowanych belek, a całość podjętych badań stanowi istotne uzupełnienie ciągle podejmowanej problematyki stabilności belek na podłożu sprężystym.

Abstract

The construction-foundation interaction problems are an important aspect of strength analysis. Research related inter alia buckling of beams on an elastic foundation have been conducted by various amount of authors. Several or over a dozen analytical models of beams resting on an elastic foundation can be found in the literature. However, many of them are so complex that it limits their practical applications in simple engineering problems. Classification of elastic foundation models has been presented in this work in [1-4, 39].

The work presents a mathematical analysis of stability of homogeneous and three-layered simply supported beams on an elastic foundation with variable geometrical properties of the foundation. The analytical model concerned the beams subjected to compression in axial planes. The function which determined the shape of the elastic foundation was assumed. In addition, original function of deflection was assumed. The formula for critical load for compressed homogeneous and three-layered beam was determined, as well as sample analytical values were performed. A comparative analysis of the results for homogeneous and three-layered beams on an elastic foundation was conducted.

The results of calculations of models of beams with the use of finite element method in SolidWorks software are the supplement of the research. Numerical values of critical loads for selected families of beams were determined. A comparative analysis concerned the results obtained by analytical and numerical methods.

The final conclusions included in the summary of the work create a practical image of the characteristic of analyzed beams and all the research is an important supplement to the constantly undertaken issue of the stability of beams on an elastic foundation.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- EI_z sztywność na zginanie,
- F_0 siła ściskająca,
- L długość belki,
- $q_f(x)$ intensywność obciążenia reakcja podłoża sprężystego,
- c(x) funkcja opisująca kształt podłoża sprężystego (funkcja kształtu),
- v(x) ugięcie belki,
 - v_a amplituda ugięcia belki,
 - \tilde{v} bezwymiarowa wartość ugięcia belki,
- m, n parametry funkcji ugięcia belki (liczby naturalne),
 - k parametr kształtu funkcji c(x),
- c_1/c_0 amplitudy funkcji c(x),
 - co maksymalna wartość reakcji podłoża
 - ξ bezwymiarowa długość belki
 - \tilde{c}_1 bezwymiarowa wartość amplitudy funkcji c(x),
- $F_{0,CR}$ obciążenie krytyczne,
 - \tilde{F}_0 bezwymiarowa wartość obciążenia
- σ_{CR} naprężenie krytyczne,
- F_{EULER} siła krytyczna Eulera,
 - A pole przekroju poprzecznego belki,
 - b szerokość belki,
 - I_z moment bezwładności przekroju poprzecznego belki na zginanie,
 - p parametr przesunięcia funkcji c(x),
 - E moduł Younga dla belki jednorodnej,
 - E_c moduł Younga rdzenia dla belki trójwarstwowej,
 - E_f moduł Younga okładziny dla belki trójwarstwowej,
 - *t*_c grubość rdzenia w belce trójwarstwowej,
 - t_f grubość okładziny w belce trójwarstwowej,
- u(x,y,t) przemieszczenie wzdłużne rdzenia,
- $u_f(x,t)$ przemieszczenie wzdłużne okładziny,
 - \tilde{u} przemieszczenie bezwymiarowe,
 - γ_{xy} kąt odkształcenia postaciowego dla belki trójwarstwowej,
 - x odkształcenie liniowe w belce trójwarstwowej,
- $U_{c}^{(u-f)}$ energia odkształcenia sprężystego okładziny górnej,
 - $U_c^{(c)}$ energia odkształcenia sprężystego rdzenia,
- $U_{c}^{(l-f)}$ energia odkształcenia sprężystego okładziny dolnej,
 - $U_c^{(f)}$ energia odkształcenia sprężystego okładziny górnej i dolnej,
 - T energia kinetyczna dla belki trójwarstwowej,
 - W praca obciążenia dla belki trójwarstwowej,
 - χ_f stosunek grubości okładziny do grubości rdzenia w belce trójwarstwowej,
 - *e_f* stosunek modułu Younga okładziny do modułu Younga rdzenia w belce trójwarstwowej
 - v_{0f} stosunek gęstości okładziny do gęstości rdzenia w belce trójwarstwowej
 - λ stosunek długości belki do grubości rdzenia w belce trójwarstwowej
 - α_c stosunek amplitudy c_0 do modułu Younga rdzenia w belce trójwarstwowej
 - *G*_c moduł Kirchhoffa rdzenia w belce trójwarstwowej,
 - ν_c współczynnik Poissona rdzenia w belce trójwarstwowej,
 - g_c gęstość rdzenia w belce trójwarstwowej,
 - g_f gęstość okładziny w belce trójwarstwowej.

Wstęp 1. Przegląd literatury 1.1. Modele konstrukcji na podłożu sprężystym

Belki są podstawowymi częściami, które są stosowane w różnych konstrukcjach. Zgodnie z definicją, są długimi prętami, poddawanymi głównie zginaniu. Mogą również być poddane ścinaniu, skręcaniu, a także osiowemu ściskaniu. Bardzo ważnym zagadnieniem w projektowaniu belek jest ich interakcja z podłożem, na którym spoczywają. Ma to znaczenie zwłaszcza w przypadku nawierzchni drogowych, kolejowych i lotniskowych, które obciążone są nie tylko siłami statycznymi, ale i dynamicznymi. W literaturze światowej opisano kilka modeli analitycznych belek na podłożu sprężystym. Wiele z nich jest jednak tak skomplikowanych, że ogranicza to ich praktyczne zastosowanie. Dzięki temu, dużą popularnością nadal cieszą się proste, choć zmodyfikowane modele tychże elementów. Do modeli tych zaliczamy jednoparametrowy model Winklera, modele dwuparametrowe, trójparametrowe, a także sprężyste modele ciągłe.

Model Winklera jest najprostszym opisem zachowania sprężystego podłoża. Po raz pierwszy przedstawiono go w roku 1867. W modelu tym zakłada się, że przemieszczenie dowolnego punktu powierzchni podłoża jest niezależne od przemieszczeń innych punktów oraz, że oddziaływanie podłoża w wybranym punkcie powierzchni jest proporcjonalne do przemieszczenia.

Model ten zawiera następujące założenia upraszczające:

- między podłożem a spoczywającą na nim belką nie występują siły tarcia;
- więzy łączące belkę z podłożem przenoszą zarówno rozciąganie, jak i ściskanie;
- przemieszczenie dowolnego punktu podłoża jest niezależne od przemieszczeń innych jego punktów (fizycznym modelem podłoża jest układ nieskończenie wielu sprężyn – rys. 1).



Rys. 1. Jednoparametrowy model Winklera

Zależność między ugięciem w i ciśnieniem (tzw. odporem) podłoża p można zapisać następująco:

$$p(x, y) = kw(x, y), \tag{1}$$

gdzie $k \left[\frac{N}{m^3}\right]$ – współczynnik sprężystości podłoża.

W przypadku uogólnionego modelu podłoża Winklera, oprócz reakcji pionowej, występują reakcje poziome podłoża sprężystego.

Modele dwuparametrowe [1-4, 39]:

<u>Model Filonenki-Borodicha:</u> Model ten sformułowano z uwzględnieniem ciągłości pomiędzy poszczególnymi sprężynami. Ciągłość tą uzyskano poprzez połączenie górnych końców sprężyn z cienką, sprężystą membraną o stałej wartości naprężeń T. Oddziaływanie elementów sprężynowych w modelu scharakteryzowane jest więc poprzez intensywność naprężenia T w membranie. Model (w zagadnieniu przestrzennym) można wyrazić matematycznie następującym równaniem:

$$p(x, y) = kv(x, y) - T\nabla^2 w(x, y), \qquad (2)$$

dla podłoża prostokątnego lub kołowego oraz

$$p(x,y) = kv(x,y) - T\frac{d^2w}{dx^2}(x,y),$$
(3)

dla pasma podłoża, gdzie ∇^2 jest operatorem Laplace'a w przestrzeni dwuwymiarowej równym $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, natomiast *T* jest siłą rozciągającą membranę.

<u>Model Vlaslova-Leontieva:</u> Dwuparametrowy model podłoża, w którym pierwszy parametr związany jest ze sztywnością sprężyny pionowej, a drugi został wprowadzony w celu uwzględnienia zależności liniowej pomiędzy sprężynami. Drugi parametr pozwala ponadto na uwzględnienie wpływu podłoża po obu stronach belki.

<u>Model Pasternaka</u>: Model ten sformułowano z uwzględnieniem założenia, że pomiędzy poszczególnymi sprężynami zachodzi ścinanie. Efekt ten uzyskuje się poprzez połączenie końców sprężyn z belką lub płytą, która podlega tylko odkształceniom poprzecznym. Model Pasternaka stanowi czuła na ścinanie warstwa ułożona na sprężynach Winklera. Parametrami podłoża są: stała k oraz moduł ścinania G. Ciągłość modelu zagwarantowana jest poprzez uwzględnienie warstwy ścinającej. Model Pasternaka można porównać z modelem Filonenki-Borodicha (stałą T zastąpiono stała G). Matematycznie model zapisać można następująco:

$$p(x,y) = kw(x,y) - G\nabla^2 w(x,y), \tag{4}$$

gdzie G jest modułem ścinania w warstwie ścinającej i wynosi $G = \frac{E}{2(1+v)}$

Model Pasternaka w przestrzeni jednowymiarowej można zapisać następująco:

$$p(x) = kw(x) - G \frac{d^2 w(x)}{dx^2}.$$
 (5)

Do modeli dwuparametrowych, oprócz przedstawionych powyżej, można zaliczyć również model Wiegharda, Świtki czy Murawskiego [4].

Modele trójparametrowe [1-4, 39]:

<u>Model Heteneyi'a:</u> Model ten stanowi pewnego rodzaju kompromis pomiędzy dwoma skrajnymi podejściami dotyczącymi podłoża sprężystego, a mianowicie modelem Winklera i izotropowymi modelami ciągłymi. W modelu tym, oddziaływanie ze sobą poszczególnych sprężyn odbywa się poprzez dołączoną do układu sprężystą belkę lub płytę, która ulega wyłącznie zginaniu. Matematyczny opis jest następujący:

$$p(x, y) = kw(x, y) - D\nabla^2 w(x, y), \tag{6}$$

gdzie D jest sztywnością na zginanie sprężystej płyty i wynosi

$$D = \frac{E_p h_p^3}{12(1-\mu_p^2)},$$

natomiast $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$, *p* jest wartością ciśnienia na styku płyta-sprężyny, *E_p* i μ_p są odpowiednio modułem Younga i współczynnikiem Poissona dla płyty, a *h_p* jest grubością płyty. Model Heteneyi'a w przestrzeni jednowymiarowej jest następujący:

$$p(x) = kw(x) + EI \frac{d^4w(x)}{dx^4}.$$
(7)

Belka lub płyta stanowiąca element modelu zagłębia się w podłożu sprężystym. W tym przypadku model Hetenyi'a należy opisać trzema parametrami: sztywnością na zginanie płyty lub belki oraz dwoma współczynnikami sprężystości.

<u>Model Kerra:</u> W modelu tym warstwa ścinająca wprowadzana jest do podłoża Winklera w taki sposób, że sprężyny znajdują się zarówno nad, jak i pod nią. W zależności od ułożenia, sprężyny posiadają różne właściwości (różne stałe sprężyny). Model Kerra składa się z dwóch warstw sprężystych (górna warstwa – podłoże Winklera, dolna warstwa – podłoże Pasternaka) połączonych warstwą ścinającą o jednostkowej grubości. Matematycznie model jest następujący:

$$p = \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) = \frac{G}{k_1} \nabla^2 q + k_2 w - G \nabla^2 w,$$
(8)

gdzie k_1 jest stałą sprężyny dla pierwszej warstwy, k_2 – stałą sprężyny dla drugiej warstwy, a w jest ugięciem warstwy pierwszej.

Ugięcie całkowite podłoża jest równe sumie ugięć poszczególnych warstw ($w = w_1 + w_2$). <u>Model Reissnera:</u> Model jest wynikiem rozwoju badań dotyczących podłoży trójparametrowych. Stanowi on uogólnienie modeli dwuparametrowych. Trzeci parametr został dodany celem uczynienia modelu bardziej realistycznego i praktycznego. Ponadto w literaturze znaleźć można następujące modele: sprężysto-plastyczny model Rhines'a oraz model Starzewskiego. W przypadku sprężystych modeli ciągłych wyróżnić można: model izotropowy, model anizotropowy, model niejednorodny, a także model warstwowy.

Modele podłoża można również podzielić ze względu na kryterium fizyczne. Według tego założenia można wyróżnić modele liniowo-sprężyste, nieliniowo-sprężyste, lepkosprężyste, sprężysto-plastyczne, a także modele lepkosprężysto-plastyczne [1].

1.2. Belki jednorodne na podłożu sprężystym

Belki na podłożu sprężystym znalazły zastosowanie przy projektowaniu różnego rodzaju konstrukcji, m.in. budynków, linii kolejowych, autostrad. W praktyce inżynierskiej, poza belkami podpartymi punktowo, spotykamy również belki podparte na całej swojej długości na podłożu gruntowym. Przykładami takich belek są np. ławy fundamentowe. Również szyny kolejowe mogą być w przybliżeniu traktowane jak belki ciągłe, gdyż są podparte punktowo, ale na dużej liczbie podpór rozmieszczonych w niewielkich odstępach w stosunku do swojej długości. Chcąc wyznaczyć siły przekrojowe i ugięcia należy uwzględnić współdziałanie belki i podłoża.

Zagadnienia stateczności konstrukcji mają istotne znaczenie w ich projektowaniu. Jedną z form utraty stateczności jest wyboczenie, które stanowi duży problem, zwłaszcza w przypadku elementów spoczywających na podłożu sprężystym. Wyboczeniem konstrukcji ściskanej siłą osiową nazywamy jej nagłe wygiecie w kierunku prostopadłym do osi podłużnej, zaś siła krytyczna nazywamy siłę, przy której następuje jej wyboczenie. Wyboczenie sztywnej belki na podłożu sprężystym zostało zbadane m. in. przez Zhanga i innych [5]. Zaprezentowano model analityczny, który pozwolił na obliczenie wartości obciążeń krytycznych. Belka została usztywniona poprzecznie za pomocą sprężyny translacyjnej o sztywności k_s (utwierdzenie przegubowe na obu końcach belki). Obliczeń dokonano dla zmiennych parametrów, m.in. dla różnego położenia sprężyny oraz różnych jej sztywności. Obciążenie belki zmieniało się wraz ze zmianą sztywności sprężyny oraz jej odległości od podpór. Ponadto zauważono, że wraz ze zwiększaniem się długości belki, wpływ jej sztywności na charakter wyboczenia jest pomijalny. Analiza powyboczeniowa obciążonej osiowo sprężystej belki, spoczywającej na liniowym podłożu sprężystym, przedstawiona została w pracy [6]. Badania analityczne wykazały, że postać wyboczenia zależna była od wartości bezwymiarowego współczynnika podłoża k (sztywność podłoża Winklera). Analiza termomechaniczna zjawiska wyboczenia belek typu FE (functionally graded) na nieliniowym podłożu spreżystym sformułowana została przez Fallaha i Aghdama [7]. W pracy wykorzystano proste równania analityczne opisujące wyboczenie opisywanego elementu. Wyniki przedstawionych badań były zgodne z tymi przedstawionymi w literaturze. Wyboczenie belki osadzonej na podłożu sprężystym i obciażonej siła punktową zbadali Hung i Chen [8]. Analiza wykazała, że zachowanie się belki pod obciążeniem jej siłą punktową zależy od sztywności podłoża, a także długości o jaką skróci się ugięta belka. Yas i Samadi [9] również zajęli się problemem wyboczenia belek na podłożu sprężystym. Belki kompozytowe zostały wzmocnione włóknami węglowymi. Wyznaczono wartości obciążeń krytycznych dla różnych warunków brzegowych. Ponadto zbadano wpływ m.in. udziału objętościowego włókien węglowych, sztywności podłoża oraz warunków brzegowych na postać wyboczenia belki. Kolejne badania przeprowadzone zostały w pracy [10]. Zbadano wyboczenie belki typu FE spoczywającej na nieliniowym podłożu sprężystym. Szczegółowo określono wpływ m.in. imperfekcji geometrycznych, parametrów podłoża, siły osiowej, reakcji podpór, a także niejednorodności materiału belki na postać wyboczenia oraz wartości obciążeń. Wraz ze zwiększaniem się sztywności podłoża nieliniowego zwiększało się wyboczenie badanego elementu. Ponadto na wartości obciążeń wpływ miały również imperfekcje geometryczne. Analiza dynamiczna wyboczenia podgrzanej i ściskanej belki spoczywającej na nieliniowym podłożu sprężystym została sformułowana przez Ghiasiana i innych [11]. Właściwości materiału belki zmieniały się wzdłuż jej grubości i były zależne od temperatury. Badanym podłożem było nieliniowe podłoże trójparametrowe, które podatne było zarówno na rozciąganie jak i ściskanie. Przeprowadzona analiza pozwoliła stwierdzić, że w badanym zakresie ścieżki równowagi po wyboczeniu belki cechowały się stabilnościa. Wyboczenie belki na częściowo nieliniowym podłożu opisali Zhang i Murphy [12]. Analiza wykazała, że dzięki zastosowaniu symetrycznego podłoża nieliniowego można otrzymać stabilne formy wyboczenia. Rozwiązanie analityczne związane z wyboczeniem belek kompozytowych wzmocnionych nanorurkami węglowymi przedstawiono w pracy [13]. Badana belka spoczywała na podłożu spreżystym Pasternaka, zbudowanym z warstwy ścinającej oraz spreżyn Winklera. Zastosowano różne teorie związane z odkształceniem belki. Otrzymano podobne wyniki, z wyjątkiem tych dotyczących naprężeń stycznych. Stwierdzono ponadto, że teorie ścinania wyższych rzędów sa bardziej odpowiednie do przewidywania i obliczania wartości napreżeń stycznych. Zakładana w teorii wyższego rzędu nieliniowa deformacja przekroju wydaje się być bardziej odpowiednia dla materiałów kompozytowych niż liniowa w teorii pierwszego rzędu. Ponadto wartości obciążenia krytycznego zwiększały się wraz ze wzrostem sztywności sprężyn. Belka o zmiennych wartościach modułu Younga, współczynnika Poissona oraz gęstości masowej zbadana została przez Niknama i innych [14]. Analiza związana z wyboczeniem konstrukcji pozwoliła stwierdzić dużą zgodność pomiędzy poszczególnymi wynikami (wartości obciążenia). Drobne różnice wynikały ze zmiennej wartości współczynnika Poissona. Na wyboczenie belki największy wpływ miały parametry podłoża sprężystego, a przede wszystkim wartość współczynnika ścinania. Kolejna termomechaniczna analiza anizotropowych laminowanych belek o różnych warunkach brzegowych, spoczywających na różnych rodzajach dwuparametrowych elastycznych podłoży została sformułowana przez Li i Qiao [15]. Materiał każdej warstwy badanej belki był liniowo-sprężysty, a ponadto wzmocniony włóknami. Całość poddawana była równomiernemu wzrostowi temperatury. Wykazano, że zwiększenie wartości stosunku długości do grubości belki oraz zmniejszenie sztywności podłoża znacznie obniża ścieżki powyboczeniowe (ścieżki równowagi statycznej). Analiza numeryczna wykazała ponadto, że warunki brzegowe, sztywność podłoża oraz początkowe ugięcie wywołane przyłożonym momentem gnącym wpływają na zachowanie się konstrukcji w trakcie, jak i po wyboczeniu. Minimalne wartości obciążenia oraz postać wyboczenia w belkach na podłożu sprężystym przeanalizował Griffiths [16]. Zhang i inni [17] przedstawili model Hencky'ego dla niejednorodnych belek na elastycznie zmiennym podłożu. Model ten ma praktyczne znaczenie ze względu na fakt, że nie trzeba wprowadzać w nim żadnych fikcyjnych więzów. Ponadto wartości siły, drgań itp. można obliczyć stosując zestaw prostych równań algebraicznych, zamiast równań różniczkowych. Na podstawie wartości momentu gnącego, siły tnącej oraz ugięcia wyliczyć można sztywność sprężyn oraz podłoża. Z przedstawionej przez autorów analizy wynika, że parametr długości podłoża qL ma znaczący wpływ na postać wyboczenia, natomiast zmiana sztywności podłoża nie wpływa na wyboczenie struktury. Wyboczenie elastycznych belek osadzonych na ziarnistym podłożu zostało zbadane w pracy [18]. Analizie zostały poddane belki o zmiennych wartościach sztywności na zginanie, długości oraz różnych warunkach brzegowych. Modelem fizycznym podłoża był układ sprężyn o stałej zmieniającej się w sposób liniowy w stosunku do głębokości ziaren. Zauważono, że sztywność ziarnistego podłoża zwiększała się liniowo w stosunku do głębokości. Ponadto wyznaczono formy wyboczenia dla różnych założeń początkowych. Deng i inni w swojej pracy [19] skupili się na analizie wyboczenia belki spoczywającej na dwustopniowym, sprężystym podłożu Pasternaka-Winklera. Układ dwóch belek na sprężystym podłożu obciążony był siłą osiową N. Warstwa Winklera, znajdująca się pomiędzy dwiema belkami, reprezentowana była przez układ sprężyn naciągowych, których sztywność na jednostkę długości wynosiła k. Podłoże spreżyste było więc wykonane z dwóch warstw: warstwy Winklera i warstwy ścinającej. Belki miały taka sama długość L, szerokość b oraz grubość h. Właściwości materiałowe, takie jak moduł Younga, moduł ścinania, współczynnik Poissona oraz gęstość masowa również miały takie same wartości. Badania wykazały, że sztywność warstwy łączącej oba podłoża miała znaczący wpływ na obciążenia krytyczne, których wartość zmniejszała się wraz ze zwiększaniem się wartości parametru k. Kameswara Rao i Bhaskara Rao [20] dokonali analizy wyboczenia w belkach cienkościennych, osadzonych na podłożu Winklera-Pasternaka, poddanych skręcaniu i osiowemu obciążeniu ściskającemu. Założono, że odkształcenia w przekroju poprzecznym są postaci małych, sprężystych deformacji, natomiast odkształcenia styczne są mało istotne do dalszej analizy. Wyznaczono ścieżki równowagi po wyboczeniu belki, a także obliczono jej punkt bifurkacyjny. Wyboczenie niejednolitych, osiowo funkcjonalnych (FG), nielokalnych nanobelek Timoszenki na podłożu Winklera-Pasternaka sformułowano w pracy [21]. Dokładność zaprezentowanej metody została zweryfikowana przez porównanie otrzymanych wartości obciążeń z wynikami dostępnymi w literaturze. Obliczono m.in. wpływ nierównomierności przekroju poprzecznego, parametrów podłoża Winklera i Pasternaka oraz warunków brzegowych na wartości obciążeń. Wskaźnik zmniejszania się obciążenia zależny był od warunków brzegowych, a także od typu zastosowanego podłoża sprężystego. Analizę nieskończenie długiej belki Eulera-Bernoulliego spoczywającej na podłożu Pasternaka i poddanej działaniu obciążenia poruszającego się ze stałą prędkością wzdłuż belki opisano w pracy [22]. Przeprowadzono badania definiujące wpływ prędkości obciążenia oraz parametrów podłoża na zachowanie się belki. Stwierdzono, że model Pasternaka w lepszy sposób odzwierciedla zachowanie się konstrukcji na podłożu sprężystym, w porównaniu do modelu Winklera. Opracowane rozwiązania dostarczają lepszych wytycznych do oceny parametrów podłoża sprężystego, a także stanowią pomoc dla praktycznych celów projektowych.

Analiza dynamiczna belek na podłożu sprężystym została przedstawiona przez różnych autorów. Wang i Brannen [23] studiowali naturalne częstotliwości zakrzywionych belek na podłożu sprężystym. Określono wpływ kąta zakrzywienia belki oraz parametrów podłoża na częstotliwości drgań. Çalim opisał analizę dynamiczną belek na lepkosprężystym podłożu Pasternaka w pracy [24]. Na odpowiedź dynamiczna, w tym przypadku, miał wpływ współczynnik lepkości podłoża. Im większa wartość współczynnika, tym krótszy czas tłumienia drgań. Ponadto zaobserwowano, że wraz ze zwiększaniem się wartości współczynnika lepkości, zmniejszała się wartość amplitudy. Analiza statyczna, a także analiza drgań swobodnych belek prostych oraz kołowych na podłożu sprężystym została zaproponowana przez Çalima and Akkurta [25]. Badania wykazały, że warunki brzegowe, stosunek długości belki do jej wysokości, a także stałe sprężyn wpływają na charakter drgań. Wraz ze zwiększaniem się wartości bezwymiarowej stałej sprężyny, zwiększają się naturalne częstotliwości drgań belki. Ponadto wraz ze zwiększaniem się stosunku promienia belki kołowej do jej wysokości, również zwiększają się częstotliwości drgań. Motaghian i inni [26] sformułowali problem drgań swobodnych belki na podłożu Winklera. Konwencjonalne metody proponowane przez innych autorów oparte są na podziale belki na trzy części i zastosowaniu odpowiednich warunków ciągłości struktury celem rozwiązania równania różniczkowego. Nowa metoda zaproponowana w pracy [26] dzieli belkę na trzy części, a część środkowa osadzona jest na podłożu sprężystym. Analiza wyników wykazała, że zaproponowana metoda może być z powodzeniem stosowana do obliczania naturalnych częstotliwości belek, które tylko częściowo spoczywaja na podłożu sprężystym. Analizę wymuszonych drgań belek zakrzywionych, spoczywających na dwuparametrowym podłożu sprężystym i poddanych obciążeniom impulsowym przedstawił Çalim [27]. Wyznaczono i obliczono dynamiczną macierz sztywności. Zaobserwowano dużą zgodność pomiędzy wynikami wyznaczonymi różnymi metodami. Częstotliwości drgań własnych oraz drgania skrętne belek pryzmatycznych na podłożu Pasternaka opisano w pracy [28]. Szczególna uwage zwrócono na obciążenia zginające i skrętne badanych elementów. Założono, że belka jest prosta i jednolita, posiada prostokątny przekrój poprzeczny, a jej wysokość jest mała w stosunku do długości. Zaproponowany model podzielono na tryby związane ze zginaniem i skręcaniem belki. W przypadku zginania założono, że belka posiada dostateczną sztywność aby przeciwstawić się skręcaniu. Na charakter drgań wpływały w tym przypadku wyłącznie obciążenia zginające. W przypadku skręcania założono natomiast, że czynnikiem determinującym odpowiedź dynamiczną belki sa wyłącznie obciażenia skręcające. Ponadto z pracy wywnioskowano, że w przypadku zginania efekt bezwładności obrotowej zmniejsza naturalne częstotliwości. Częstotliwości dla trybu skrętnego były natomiast niezależnie od innych czynników. Dodatkowo wraz ze zwiększaniem się sztywności podłoża warstwy Winklera oraz warstwy ścinającej zwiększały się parametry częstotliwościowe. Wpływ nieliniowego podłoża sprężystego na drgania swobodne i wymuszone o dużej amplitudzie w belce typu FG zaprezentowano w pracy [29]. Badana struktura została poddana działaniu obciążenia o charakterze harmonicznym. Przyjęto, że właściwości belki, takie jak moduł Younga oraz gęstość, zmieniały się w kierunku grubości, od metalu na powierzchni dolnej, do ceramiki na powierzchni górnej. Zauważono, że wartość naturalnej częstotliwości belki jest ściśle związana ze sztywnością nieliniowego podłoża sprężystego. Możliwe jest zredukowanie nieliniowości w przypadku drgań wymuszonych o dużej amplitudzie poprzez zwiększenie sztywności liniowej lub ścinania w podłożu sprężystym. Analizę geometrycznie nieliniowych drgań belki Timoszenki osadzonej na nieliniowym podłożu Winklera i Pasternaka o zmiennej nieciągłości przedstawił Stojanović [30]. Dokonano analizy porównawczej wyników dla różnych sztywności podpór. Zbadano wpływ nieciągłości podłoża na naturalne częstotliwości drgań belki. Drgania chaotyczne belek spoczywających na spreżystym nieliniowym podłożu (o nieliniowej sztywności) przeanalizowali w swojej pracy Norouzi i Younesian [31]. Belki zostały poddane działaniu ściskającej siły osiowej z jednoczesnym ruchem posuwistozwrotnym poprzecznego obciążenia. Określono wpływ liniowych i nieliniowych parametrów na odpowiedź układu. Drgania belki na inercyjnym podłożu Własowa-Leontiewa pod wpływem impulsu siły przedstawili Szcześniak i Ataman [32]. Zbadano wpływ parametrów podłoża na ugięcia wywołane impulsem siły przyłożonym w środku rozpiętości belki lub w pobliżu podpory. Przeprowadzona analiza potwierdziła, że ugięcia belki spoczywającej na podłożu są mniejsze niż ugięcia belki bez uwzględnienia warstwy Własowa. Analiza drgań swobodnych o dużej amplitudzie belek o przekroju prostokątnym spoczywających na zmiennym podłożu sprężystym została przedstawiona w pracy [33]. Do belek zastosowano hipoteze Eulera-Bernoulliego, natomiast podłoże zostało opisane modelem Winklera. Belka została obciążona osiowo. Zbadano wpływ zmiennego podłoża sprężystego, amplitudy drgań, a także obciążenia osiowego na nieliniową częstotliwość drgań belki. Największy wpływ na częstotliwość miał sinusoidalny rozkład podłoża Winklera (większy niż liniowy i paraboliczny). Innymi słowy, dla zmaksymalizowania nieliniowej częstotliwości belki, rozkład podłoża musi być zbliżony do podstawowego rozkładu belki. Drgania swobodne i wymuszone w belkach na dwuparametrowym lepkosprężystym podłożu opisał Calim [34]. Właściwości materiału belki zmieniały się wzdłuż jej osi. Pod uwagę wzięto niejednorodność materiału oraz stałe podłoża. Analiza wykazała, że wskaźnik gradientu materiału, stałe sprężyny, współczynniki lepkości oraz różne warunki brzegowe mają znaczący wpływ na odpowiedź dynamiczną belek. Zwiększenie wartości parametrów podłoża prowadzi do spadku częstotliwości drgań własnych, okresu drgań, a także amplitudy przemieszczeń. Ponadto stwierdzono, że zwiększenie wartości współczynnika lepkości powoduje ogromny spadek amplitudy w przypadku dynamicznej odpowiedzi belki. Analiza drgań własnych belki spoczywającej na spreżystym podłożu Pasternaka-Winklera sformułowana została w pracy [19]. Obliczono wartości przemieszczeń dla różnych prędkości przyłożenia obciążenia. Odkształcenie dolnej belki było zbliżone do odkształcenia wywołanego obciążeniem statycznym. Gdy prędkość przyłożenia obciążenia przekraczała wartość krytyczna, belka zaczynała drgać. Ponadto przeprowadzone badania pozwoliły określić największe poprzeczne przemieszczenie górnej belki dla różnych prędkości przyłożenia obciążenia. Zaobserwowano, że amplituda drgań gwałtownie wzrasta w miarę zbliżania się prędkości do wartości krytycznej. Pewnym rodzajem drgań samowzbudnych sa drgania relaksacyjne. Przy takich drganiach występuje opóźnienie pomiędzy gromadzeniem energii potencjalnej i jej przekształceniem w kinetyczną (jest to tak zwany czas relaksacji). Po czasie relaksacji nagromadzona energia całkowicie się rozprasza i proces napełniania od stale działającego źródła rozpoczyna się na nowo. W pracy [19] określono również wpływ czasu relaksacji na przemieszczenie górnej belki. Analiza dynamiczna belki Eulera-Bernoulliego o nieskończonej długości, spoczywającej na podłożu Pasternaka i obciążonej w sposób harmoniczny (obciążenie nie jest przyłożone prostopadle do osi belki) została przybliżona w pracy [35]. Konwencjonalne podłoże Pasternaka jest modelowane za pomoca dwóch parametrów, z których to drugi uwzględnia rzeczywisty efekt ścinania podłoża w kierunku pionowym. Jest on zatem bardziej realistyczny od modelu Winklera, który to uwzględnia wyłącznie odporność podłoża na ściskanie. Zastosowano podwójną transformację Fouriera celem uproszczenia równania geometrycznego i przekształcenia go do prostego równania algebraicznego. Zbadano zależności występujące pomiędzy dolną częścią belki, a podłożem. Stwierdzono, że kąt pod jakim przyłożone jest obciążenie oraz sztywność na ścinanie znacząco wpływają na wartość prędkości odkształcenia pionowego i poziomego, a także na wartości momentu zginającego. Dynamiczną odpowiedź belki Eulera-Bernoulliego na podłożu sprężystym oraz styczne oddziaływanie belki i podłoża pod obciążeniem harmonicznym opisano w pracy [36]. Przyjęto, że pozioma reakcja sprężyny jest proporcjonalna do względnego przemieszczenia stycznego. Ponadto przeprowadzono analize numeryczną celem zbadania wpływu sztywności poziomej sprężyny na dynamiczną odpowiedź belki. Stwierdzono dużą zgodność pomiędzy wynikami otrzymanymi metodą analityczną i numeryczną. Metoda półanalityczna służąca do badań drgań wymuszonych o dużej wartości amplitudy w belkach typu FG, spoczywających na podłożu sprężystym, została zaprezentowana w pracy [37]. Założono, że belka jest smukła. Pozwoliło to na pominiecie efektu bezwładności obrotowej i odkształceń poprzecznych. Wyniki zostały porównane z tymi otrzymanymi w poprzednich badaniach.

Badania związane z ruchomymi obciążeniami przedstawione zostały w pracy [38]. Froio i inni zaprezentowali badania związane z dynamiczną odpowiedzią swobodnie podpartej sprężystej belki Eulera-Bernoulliego spoczywającej na przestrzennie niejednorodnym, nieliniowym sprężystym podłożu Winklera i poddanej działaniu skoncentrowanego ruchomego obciążenia harmonicznego. Badania skupiły się na analizie numerycznej zjawiska. Maksymalne wartości przemieszczenia belki oraz prędkości krytyczne wyznaczono w funkcji średniej wartości obciążenia oraz jego częstotliwości oscylacji. Przeprowadzono kilka symulacji numerycznych, w których zmiennymi parametrami były prędkość poruszającego się obciążenia, a także średnia wartość częstotliwości. Kolejna analiza numeryczna związana z nieliniowymi drganiami swobodnymi i wymuszonymi wyboczonych i zakrzywionych belek na nieliniowym podłożu sprężystym sformułowana została w pracy [39]. Określono wpływ przyłożonego obciążenia osiowego, imperfekcji, a także nieliniowego podłoża sprężystego na wartości częstotliwości drgań własnych oraz wymuszonych w badanej belce. Wyniki uzyskane za pomocą zaproponowanej metody zostały zestawione z wynikami dostępnymi w literaturze. Dynamiczną odpowiedź belki o skończonych wymiarach (spoczywającej na podłożu Winklera) na obciążenie poruszające się po jej powierzchni ze zmienną prędkością przeanalizowano

w pracy [40]. Obciążenie miało charakter skoncentrowany i zmieniało się w czasie w sposób harmoniczny. Przeprowadzono badania parametryczne dotyczące wpływu sztywności podłoża, a także przyspieszenia lub opóźnienia ruchomego obciążenia lub obciążeń na charakterystyke belki. Stwierdzono, że zwiększenie wartości stałej podłoża sprężystego powoduje zmniejszenie ugięcia belki. Ponadto przeprowadzono badania parametryczne dla dwóch rodzajów ruchomych obciążeń zamodelowanych w postaci pojazdów jedno- i dwuosiowych celem oceny wpływu różnych parametrów na konstrukcję. W przypadku pojazdów jednoosiowych, zwiększenie wartości przyspieszenia i prędkości powoduje zmniejszenie ugięcia belki, natomiast zwiększone wartości opóźnienia i prędkości powodują efekt odwrotny. W przypadku pojazdów dwuosiowych, zwiększone wartości przyspieszenia i opóźnienia oraz prędkości powodują zwiększenie wartości ugięcia belki. Podobne badania przedstawiono w pracy [41], gdzie przeanalizowano belkę na podłożu Winklera poddanej działaniu ruchomego obciążenia o zmiennej prędkości. Obciążenie punktu ruchomego miało amplitude zmieniającą się harmonicznie wraz z upływem czasu i poruszało się ze stałym przyspieszeniem lub opóźnieniem wzdłuż górnej powierzchni belki. Przeprowadzono badania parametryczne dotyczące wpływu różnego rodzaju parametrów na konstrukcję. Wyniki analizy były zgodne z tymi uzyskanymi w pracy [40]. Charakterystyka belki o długości około 50 mm była podobna do tej uzyskanej dla belki o nieskończonych wymiarach, zwłaszcza w przypadku małej sztywności podłoża. Numeryczna analiza dynamiczna belek na nieliniowym, sprężystym podłożu, poddanych obciążeniu w postaci oscylatora o równomiernym ruchu przedstawiono w pracy [42]. Celem badań było określenie wpływu naturalnej częstotliwości i prędkości oscylatora oraz sztywności podłoża na zachowanie się belki. Wyznaczono krytyczne prędkości oscylatora oraz zakresy prędkości, dla których system jest niestabilny dynamicznie. Wykazano, że zwiększenie sztywności podłoża sprężystego prowadzi do zmniejszenia szczytowych wartości przemieszczeń, a także do zwiększenia krytycznych prędkości i ich zakresów, w których belka jest niestabilna dynamicznie (sprężyste podłoże liniowe). Zmiana podłoża na nieliniowe skutkuje zwiększeniem wartości prędkości krytycznej oscylatora.

Zginanie belki na trójparametrowym podłożu sprężystym typu Kerra poddano analizie w pracy [43]. Model Kerra stanowił początkowo próbę uogólnienia dwuparametrowego modelu Pasternaka. Przeprowadzono analizę parametryczną elastycznie podpartych belek o skończonej i nieskończonej długości. Ponadto porównano między sobą podłoża jedno, dwu i trójparametrowe, a także dokładniejsze dwuwymiarowe modele numeryczne. Badania ujawniły wyższość trójparametrowego modelu Kerra w stosunku do modeli jedno- i dwuparametrowych. Przewaga modelu Kerra nad pozostałymi modelami jak widoczna przy porównaniu między sobą maksymalnych wartości momentów gnących i przemieszczeń poziomych. Matematyczną analogię belek na sprężystych podporach do belek na podłożu sprężystym opisali Sato i inni [44]. Autorzy zaproponowali hipotezę z której wynika, że belkę utwierdzoną na równo oddalonych od siebie sprężystych podparciach można traktować jako belkę osadzoną na podłożu sprężystym. Hipotezę tę można stosować zarówno

w badaniach związanych z analizą statyczną, a także przy problemach związanych z drganiami swobodnymi konstrukcji. W celu weryfikacji modelu porównano ze sobą wartości ugięć i momentów zginających, a także naturalne częstotliwości drgań. Pomiędzy wynikami nie zaobserwowano znaczących różnić. Dokładne rozwiązania dotyczące zginania oraz drgań swobodnych belki na sprężystym podłożu Winklera-Pasternaka przedstawiono w pracy [45]. Przedstawione rozwiązania zostały oparte o dwuwymiarową teorię sprężystości. Założono, że belka posiada właściwości ortotropowe w każdym punkcie, natomiast właściwości materiałowe zmieniają się w sposób wykładniczy po grubości belki. Zbadano wpływ takich parametrów, jak współczynnik gradientu, współczynnik proporcji, parametry podłoża oraz właściwości mechaniczne belki na całą strukturę. Odpowiedź statyczną belki o nieskończonej długości, spoczywającej na sprężystym podłożu i poddanej złożonym obciążeniom poprzecznym przedstawiono w pracy [46]. Wyznaczono wartości ugięć oraz sił tnących dla całej belki. Belki na podłożu sprężystym zaprezentowali również Borák i Marcián [47]. Do rozwiazania problemu oraz obliczenia ugięcia struktury zastosowano twierdzenie Betti'ego. Założono, że siły reakcji powstałe podczas zginania belki rozkładają się w sposób ciągły na całej długości podłoża. Zastosowanie twierdzenia Betti'ego pozwoliło na wyprowadzenie podstawowych wzorów niezbędnych do analizy belek na podłożu sprężystym, a także na obliczenie takich parametrów jak pionowe ugięcie belki, kąt obrotu, moment gnący oraz siła tnąca. Nowy model podłoża sprężystego dla dynamicznych badać belek na nieliniowym podłożu, poddanych obciążeniu w postaci poruszającej się masy zaproponowano w pracy [48]. Model zawierał m.in. liniowe i nieliniowe parametry podłoża Winklera, liniowy parametr podłoża Pasternaka, współczynnik lepkości oraz gęstość masową podłoża. Zbadano wpływ parametrów podłoża na dynamiczną odpowiedź belki. Aslami i Akimov opracowali analityczny model dla belek na dwuparametrowym podłożu sprężystym [49]. Ogólne równanie zostało zredukowane do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach. Analizę przeprowadzono dla różnych warunków brzegowych, rodzajów podłoży oraz sposobów obciążenia belki. Analiza belki o nieskończonych wymiarach na podłożu sprężystym została przedstawiona w pracy [50]. Do obliczeń zaproponowano model dwuliniowego podłoża, który opisuje jego właściwości w strefach rozciągania i ściskania, przy wykorzystaniu dwóch różnych parametrów. Dzięki zastosowaniu do obliczeń modelu dwuliniowego możliwe jest dokładniejsze zamodelowanie podłoża sprężystego, które oddziałuje asymetrycznie zarówno na rozciąganie jak i ściskanie. Obecność obciążeń o charakterze skupionym wpływa jedynie na zmianę wartości ugięcia belki.

Grzejda [51] zaprezentował metodę modelowania normalnych charakterystyk sztywnościowych nieliniowego podłoża sprężystego. Przyjęto fizyczny model połączenia dwóch elementów określonych jako ciała odkształcalne lub nieodkształcalne. Pomiędzy elementami zamodelowano warstwę za pomocą nieliniowego modelu Winklera. Kaleta i Różycki [52] przedstawili wpływ zmiany wartości modułu Younga warstw podłoża na częstotliwość drgań własnych belki spoczywającej na dwuwarstwowym podłożu. Założono model podłoża Kolářa-Nemeca będący uogólnieniem modelu

Własowa. Zaobserwowano, że wraz ze zwiększaniem się sztywności podłoża zwiększają się wartości częstości drgań własnych układu. Lignola i inni [53] w swojej pracy przedstawili macierz sztywności dla belki Timoszenki, spoczywającej na podłożu sprężystym. Uwagę poświęcono zginaniu belki poddanej naprężeniom ścinającym. Ponadto przedstawiono szczegółową analizę numeryczną dla belki na skończonym i nieskończonym podłożu Winklera. Potrzeba dyskretyzacji elementów do krótszych członów została wyeliminowana dzięki zastosowaniu dokładnej funkcji kształtu wyprowadzonej z równania różniczkowego linii ugięcia belki. Otrzymana funkcja pozwoliła również obliczyć ugięcie, kąt obrotu belki, a także wartości momentów gnących i sił tnących. Zastosowanie zaproponowanej metody obliczeniowej w połączeniu z wykorzystaniem programów obliczeniowych pozwala na kompleksową analizę belek na podłożu sprężystym. Matryca sztywności może być w prosty sposób zaimplementowana do biblioteki elementów MES.

Bardzo pomocne w analizie belek na podłożu sprężystym są badania związane z płytami. Konstrukcje te zostały zbadane m.in. w pracy [54], gdzie przedstawiono opis ściskanej dwuosiowo płyty na podłożu sprężystym. Pomiędzy płytą a podłożem zamodelowano warstwę sprężystą. Określono charakter wyboczenia konstrukcji. Na podstawie przedstawionej analizy stwierdzono, że liniowe zależności nie są adekwatne do określenia kształtu wyboczenia płyty. Dopiero geometryczna analiza nieliniowa pozwoliła stwierdzić, że wyboczenie ma postać złożona. Taka sama postać wyboczenia charakteryzuje płyty bez warstwy sprężystej. Analiza ugięć płyty sprężystej Kirchhoffa spoczywającej na inercyjnym podłożu Własowa pod impulsem siły przeprowadzona została przez Ataman i Szcześniaka [55]. Zaobserwowano, że na ugięcie płyty ma wpływ miejsce przyłożenia impulsu. Ponadto stwierdzono, że wartość ugieć dynamicznych płyty jest uzależniona od wartości współczynników podłoża. Wyboczenie płyty na nieściśliwym podłożu elastomerowym przedstawiono w pracy [56]. Płyta została poddana działaniu jednoosiowego ściskania. Krytyczna wartość obciążenia wyboczeniowego zależna była od wartości sztywności zginania i długości płyty, a także od parametrów podłoża i jego grubości. Wykazano, że wartość krytycznej siły wyboczeniowej wiąże się z rodzajem materiału i parametrami geometrycznymi płyty (inaczej niż w przypadku belek na podłożu sprężystym). Ponadto stwierdzono, że stosunek krytycznego obciążenia wyboczeniowego dla elastomerowego podłoża i podłoża typu Winklera zależy od bocznych ograniczeń warstwy elastomeru.

1.3. Belki trójwarstwowe na podłożu sprężystym

Konstrukcje warstwowe pojawiły się w połowie XX wieku, a wraz z nimi problem ich stateczności. Rozwój technologii związanych z wytwarzaniem struktur trójwarstwowych pozwolił na szerokie ich zastosowanie. Projektowanie tych elementów pozwoliło na optymalizację metod analitycznych i numerycznych.

Przykładowe struktury warstwowe jakimi są konstrukcje trójwarstwowe składają się z rdzenia oraz dwóch okładzin o identycznej grubości, wykonanych zazwyczaj z tego samego materiału. W szczególnych przypadkach, okładziny mogą się różnić między sobą co do grubości, rodzaju materiału, orientacji włókien lub kombinacji tych trzech cech. Konstrukcja rdzenia, a także sposób jego połączenia z cienkimi okładzinami, w bardzo dużym stopniu wpływają na wytrzymałość i stateczność całej struktury, m.in. na odporność na wyboczenie (zwłaszcza miejscowe) okładzin. Większość struktur warstwowych cechuje się symetryczną budowa, a ich odmiany są związane z kształtem i właściwościami rdzenia. Rdzeń może być zbudowany z dowolnego materiału. Jeżeli chodzi o jego budowę to najczęściej występuje on w trzech postaciach: struktury plastra miodu, falistej (blacha) lub jako pianki, np. poliuretanowe, metalowe. Najważniejszą cecha jaka powinien posiadać rdzeń jest mała gestość, która skutkuje mała masą konstrukcji. Rdzeń jest poddawany głównie ścinaniu, które powoduje globalne deformacje i występowanie naprężeń ścinających. Wypełniacz należy dobrać w taki sposób, aby po przyłożeniu siły poprzecznej moduł ścinania spełniał wymagania sztywności na ścinanie. Podsumowując, właściwości podstawowe rdzenia zależą przede wszystkim od rodzaju zastosowanego materiału (gęstości, modułu odkształcalności postaciowej, wytrzymałości na ścinanie), a także od sztywności struktury w kierunku prostopadłym do powierzchni.

Coraz szersze zastosowanie struktur warstwowych związane jest z ich bardzo dobrymi właściwościami, takimi jak: dobra odporność na zginanie w porównaniu do cienkich struktur ortotropowych, duża odporność na uderzenia (udarność), duża odporność na obciążenia o charakterze zmęczeniowym, zmniejszenie grubości konstrukcji (w porównaniu do usztywnianych płyt), duża dokładność wymiarowa, odpowiednie wykończenie powierzchni zewnętrznej zapewniające bardzo dobre właściwości aerodynamiczne w konstrukcjach lotniczych i kosmicznych, a także skrócenie czasu montażu ze względu na zastosowanie podejścia modułowego. Zmniejszenie liczby prac montażowych i naprawczych nowo budowanych konstrukcji zawierających nowoczesne struktury może przynieść wymierne korzyści ekonomiczne i stanowi atrakcyjna alternatywe dla konwencjonalnych metod budowy.

Tak jak inne struktury, konstrukcje warstwowe posiadają wady. Są one podatne na utratę stateczności, spowodowaną cienkościennością oraz występowaniem imperfekcji. Skomplikowany model matematyczny opisujący zjawisko utraty stateczności wymusza stosowanie uproszczeń oraz analizę wpływu tych uproszczeń na wyniki. Ponadto brak jest potwierdzonych doświadczalnie

związków matematycznych opisujących rozkład naprężeń, odkształceń i przemieszczeń w konstrukcjach trójwarstwowych, a technologia ich wykonania jest kosztowna. Nie są one również odporne na obciążenia o charakterze skupionym, a także na zmiany temperatury. W trakcie procesu produkcyjnego pojawić się mogą takie uszkodzenia w konstrukcjach warstwowych jak rozwarstwienia materiału oraz inne zniszczenia międzyfazowe. Zwiększają się one zarówno pod działaniem obciążeń statycznych jak i dynamicznych. Rozwarstwienia stanowią jeden z największych problemów ponieważ sztywność zginania w tego typu strukturach jest związana z udziałem powierzchni okładzin w stosunku do całej powierzchni konstrukcji. Jest to tym bardziej widoczne, gdy próbka poddawana jest działaniom złożonych obciążeń zginających. Poszczególne warstwy konstrukcji warstwowej najczęściej łączy się obecnie in situ lub przy użyciu kleju poliuretanowego dwuskładnikowego, zależnie od rodzaju użytych materiałów, stosowanego procesu technologicznego oraz systemu struktur warstwowych.

Zniszczenie konstrukcji warstwowych może przyjmować wiele form i każda z tych form powinna być uwzględniona przy projektowaniu, ewentualnie wspomaganym badaniami eksperymentalnymi. Płyty warstwowe mogą ulec utracie stateczności w wielu postaciach: ogólnej utracie stateczności konstrukcji, delaminacji połączonej z lokalnym wyboczeniem okładzin, a także utracie stateczności miejscowej – marszczeniu okładziny. Ponadto mogą wystąpić klasyczne mechanizmy zniszczenia takie jak: odkształcenia plastyczne materiału lub inna forma zniszczenia, ścięcie lub zgniecenie rdzenia, a także uszkodzenie elementu w połączeniu.

Teoria dotycząca struktur warstwowych była rozwijana i uzupełniana przez wiele lat. Niemniej jednak inżynierowie do dzisiaj nie posiadają dokładnej wiedzy dotyczącej takich zjawisk jak wyboczenie, marszczenie okładzin, a także wpływu właściwości mechanicznych materiału rdzenia na właściwości struktury.

Konstrukcje warstwowe powinny być zaprojektowane w taki sposób, aby spełniały podstawowe kryteria strukturalne (korzystny stosunek masy konstrukcji do przenoszonego obciążenia, duża sztywność itp.). Okładziny powinny być wystarczająco grube aby przeciwdziałać naprężeniom rozciągającym, ściskającym i ścinającym. Rdzeń natomiast powinien cechować się dużą wytrzymałością aby przeciwdziałać naprężeniom ścinającym, wywołanym przez obciążenia, a także posiadać odpowiednią grubość aby zapobiec wyboczeniu konstrukcji. Siły adhezyjne muszą mieć odpowiednią wartość aby przenosić naprężenia ścinające pomiędzy rdzeniem a okładzinami.

Ciągłe upowszechnianie się nowoczesnych materiałów kompozytowych wymusza na badaczach opracowywanie coraz prostszych i bardziej użytecznych narzędzi do projektowania i wytwarzania tych materiałów. Niestety opracowywanie metod niezbędnych przy poprawnym projektowaniu konstrukcji kompozytowych nie jest łatwym zadaniem, a związane jest to przede wszystkim z ich właściwościami. Cechami charakterystycznymi kompozytów jest niejednorodność i właściwości anizotropowe.

Tworząc konstrukcję warstwową, należy wziąć pod uwagę szereg czynników. Modelując właściwości poszczególnych warstw w sposób intuicyjny dąży się do wytworzenia struktury jak najlżejszej, o jak największej sztywności. O parametrach użytkowych takich konstrukcji decyduje przede wszystkim budowa warstwy wypełniającej. Zastosowanie wypełniacza o dużej sztywności powoduje zwiększenie masy struktury przy pozbawieniu jej zalet typowych dla konstrukcji warstwowej. Tak zwany sztywny wypełniacz charakteryzuje się tym, że przenosi siły normalne, "odciążając" tym samym okładziny. W skrajnych przypadkach, przy obliczaniu obciążeń krytycznych i przemieszczeń, taką konstrukcję traktuje się jako jednowarstwową.

W konstrukcjach warstwowych może dojść do różnych form uszkodzenia. Są to zmiany nieodwracalne i prowadzą do osłabienia wytrzymałości kompozytu. Niezwykle ważne jest poprawne przewidzenie miejsca powstawania uszkodzenia i jego wpływu na zdolność dalszego przenoszenia obciążeń przez strukturę. Ważnym aspektem jest również rozwój uszkodzenia na skutek dalszego obciążania, aż do całkowitej utraty nośności przez element konstrukcyjny.

Właściwości konstrukcji warstwowych powodują, że znajdują one szerokie zastosowanie jako tworzywo konstrukcyjne. Struktury te mają szereg zalet, ale również wad. Znajomość zalet i wad pozwala na precyzyjną budowę modelu matematycznego.

Konstrukcje trójwarstwowe znane są od połowy dwudziestego wieku. Pierwsza praca naukowa dotycząca struktur warstwowych napisana została przez Marguerre'a w 1944 roku [57] i dotyczyła płyt narażonych na występowanie naprężeń ściskających. W 1948r., Hoff [58] wyprowadził równania różniczkowe i warunki brzegowe dla zginania i wyboczenia płyt warstwowych. W 1949r., Flűgge [59] opublikował pracę dotyczącą strukturalnej optymalizacji płyt warstwowych, w której zaproponował rozwiązania wielu problemów. We wszystkich przypadkach badane materiały posiadały właściwości izotropowe. W 1952r. Flűgge opublikował kolejną pracę dotyczącą powyższego zagadnienia [60].

Pierwsze modele teoretyczne tych struktur zostały przedstawione w pracach Libove'a i Butdorfa [61] oraz Reissnera [62] w 1948 roku. Problemy wytrzymałości i stateczności konstrukcji trójwarstwowych przedstawili m.in. Plantema [63] i Allen [64]. Libove badał właściwości warstwowych paneli z rdzeniem falistym, natomiast Volmir [65] – stateczność konstrukcji z rdzeniem jednorodnym. W późniejszych latach Magnucki i inni [66, 67] opisali zachowanie belek i płyt warstwowych z pofałdowanym rdzeniem oraz porównali uzyskane wyniki obliczeń analitycznych i numerycznych z badaniami doświadczalnymi.

W 1951r., Bijlaard [68] dokonał optymalizacji struktur warstwowych dla danego stosunku grubości okładzin do rdzenia, a także całkowitej grubości izotropowej płyty warstwowej. Skrócone wyniki tych badań przedstawione zostały na pierwszych obradach amerykańskiego Kongresu Narodowego Mechaniki Stosowanej w 1952r. [69]. W 1952r., Eringen [70] jako pierwszy użył twierdzenia o minimum energii potencjalnej w celu uzyskania czterech cząstkowych równań różniczkowych na zginanie i wyboczenie prostokątnych, izotropowych płyt warstwowych. W tym samym roku swoje

badania opublikował również March [71], natomiast podobne badania w 1956r. przedstawił Ericksen [72]. W 1955r. Raville opublikował badania związane z optymalizacją konstrukcji warstwowych [73].

W 1956r. Gerard omówił optymalizację struktur warstwowych w jednym rozdziale swojej słynnej książki "Minimum Weight Analysis of Compression Structures" [74]. W 1957r., Kaechele opublikował raport dotyczący minimalnej wagi konstrukcji warstwowych [75]. Artykuł o podobnej tematyce wydał Cheng [76]. W 1960 roku, Heath opublikował artykuł dotyczący zależności i rozszerzenia istniejących teorii dotyczących płaskich płyt warstwowych poddanych wzdłużnemu ściskaniu, a także optymalizacji ich projektowania [77, 78].

Do połowy 1960r., liczba prac dotyczących konstrukcji i optymalizacji struktur warstwowych znacznie się zwiększyła. W 1966 roku Plantema wydał pierwszą książkę dotyczącą omawianych konstrukcji [79], a trzy lata później powstała kolejna praca napisana przez H.G. Allena [80]. Książki te zostały uznane za najważniejsze prace aż do połowy lat 90. Również w połowie lat 60 przeprowadzono badania dotyczące opracowania struktur warstwowych z kompozytów z włókna szklanego. Większość z tych badań dotyczyła optymalizacji konstrukcji poprzez zmniejszenie jej ogólnej masy celem stworzenia konkurencji do struktur aluminiowych [81–86]. Dokładna bibliografia publikacji opisująca powyższe badania przedstawiona została w pracy [81].

Wszystkie dostępne rozwiązania dotyczące belek mogą być stosowane również w przypadku belek warstwowych, poddanych tym samym obciążeniom oraz posiadających takie same warunki brzegowe. Należy jedynie zastosować odpowiednie wartości sztywności zginania, a także pamiętać o użyciu poprawnych wyrażeń do obliczeń naprężeń zaraz po obliczeniu odkształceń.

Charakterystyka belek trójwarstwowych pod wpływem działających na nie obciążeń, a także mechanizmy związane z ich zniszczeniem mogą być określone po przeprowadzeniu prostych testów osiowego ściskania lub zginania. W przypadku pierwszego typu obciążenia, konstrukcja warstwowa może ulec wyboczeniu ogólnemu lub miejscowemu. Przykład modelu analitycznego opisującego to zjawisko przedstawiono m.in. w pracy Léotoinga [87], natomiast badania numeryczne opisano w pracy Hadi [88].

W przypadku rozwiązywania równań związanych z konstrukcjami warstwowymi, trudnymi ze względu na obciążenia, warunki brzegowe, zmiany geometrii itp., wskazane jest zastosowanie twierdzenia o minimum energii potencjalnej. Dzięki tej metodzie uzyskać można odpowiednie rozwiązania, które mogą być sprawdzone na kilka sposobów. Jako alternatywę do twierdzenia o minimum energii potencjalnej zastosować można teorię wariacyjną Reissnera. Twierdzenie o minimum energii potencjalnej dla efektów dynamicznych może być zastosowane łącznie z zasadą Hamiltona.

Najważniejszą przyczyną coraz szerszego zastosowania struktur warstwowych jest ich bardzo dobry stosunek sztywności na zginanie do masy. Skutkuje on występowaniem mniejszych deformacji bocznych struktury, większą odpornością na wyboczenia, a także większymi wartościami częstotliwości naturalnej, niż w przypadku innych konstrukcji. Struktury warstwowe, dla zadanego zestawu obciążeń mechanicznych i środowiskowych, zapewniają mniejszą masę niż w przypadku innych stosowanych konstrukcji.

Najprostszym przykładem struktury warstwowej jest laminat. Składa się on z kilku warstw o identycznych właściwościach materiałowych, mogących się różnić orientacją włókien oraz grubością. Innym przykładem są materiały hybrydowe, spośród których można wyróżnić materiały *FGM* (funcionally graded materials) oraz struktury sandwichowe. Materiały hybrydowe charakteryzują się odmiennymi właściwościami materiałowymi poszczególnych warstw (mogą się również różnić grubością i orientacją włókien) [89].

Innym przykładem konstrukcji są kompozyty warstwowe typu *FML* (*fibre metal laminate*), które mogą przenosić duże obciążenia przy rozciąganiu i zginaniu, gdyż przy takich sposobach obciążenia niebezpieczeństwo delaminacji spowodowanej odrywaniem lub ścinaniem międzywarstwowym jest niewielkie. Skręcanie takich materiałów stwarza jednak duże niebezpieczeństwo zniszczenia na skutek delaminacji [90].

W pracy [91] przedstawiono metalową belkę warstwową z rdzeniem w postaci pofałdowanej blachy, wypełnionym pianką aluminiową. Belka została zginana trójpunktowo. Wypełnienie struktury pianką aluminiową prowadzi do dużego zwiększenia sztywności zginania i wytrzymałości, przy jednoczesnym małym zwiększeniu masy struktury [91]. Właściwości belki wypełnionej pianką aluminiową są lepsze w porównaniu do konstrukcji bez wypełnienia, zwłaszcza przy działaniu małych obciążeń. Wzmocnienie struktury spowodowane zastosowaniem pianki związane jest ze zwiększeniem odporności na wyboczenie powierzchniowe pofałdowanych arkuszy [92].

Nowe spojrzenie na struktury warstwowe można znaleźć w tzw. konstrukcjach integralnych. Konstrukcja taka nie posiada oddzielnych warstw, a wykonana jest z materiału o zróżnicowanej gęstości. Warstwy zewnętrzne o dużej gęstości i tym samym dużej wytrzymałości spełniają role warstw nośnych, natomiast w kierunku rdzenia stosuje się materiał o mniejszej, zmiennej gęstości (i wytrzymałości). Teoria konstrukcji warstwowych pozwala również na projektowanie struktur złożonych z wielu warstw, o zróżnicowanych gęstościach i właściwościach wytrzymałościowych – dużych w warstwach zewnętrznych, skokowo zmniejszanych w kierunku rdzenia.

Właściwości konstrukcji warstwowych zależą od właściwości okładzin, rdzenia, sposobu ich połączenia, a także wymiarów geometrycznych [93]. Belki warstwowe, poddane zginaniu, narażone są na zniszczenia. Inicjacja i propagacja zniszczeń zależy od właściwości materiałów (zwłaszcza materiału rdzenia), geometrii oraz rodzaju obciążenia. Odkształcenie plastyczne lub pęknięcie rdzenia występuje po osiągnięciu jego krytycznej wytrzymałości (zazwyczaj na ścinanie). Idealny materiał rdzenia powinien mieć strukturę anizotropową o dużej sztywności i wytrzymałości.

Struktury warstwowe zachowują się podobnie jak tradycyjne pojedyncze belki, składające się z dwóch półek i łączącego ich środnika. Środnik stanowi element łączący obie półki, a także przeciwdziała występowaniu naprężeń ścinających. Struktury warstwowe i proste belki różnią

się między sobą pod kilkoma względami. Okładziny i rdzeń zbudowane są z różnych materiałów, a rdzeń stanowi stałe wsparcie dla okładzin. W przypadku pojedynczej belki wsparcie to znajduje się w wąskim środniku. Podczas gdy belka obciążona jest momentem gnącym, okładziny współpracują ze sobą. Stanowią one opór, który przeciwdziała wystąpieniu bocznego momentu gnącego w taki sposób, że jedna z okładzin jest rozciągana, natomiast druga ściskana. Rdzeń ponadto jest odporny na działanie sił poprzecznych. Pełni on zatem dwojaką funkcję: stanowi element łączący obie okładziny, a także przeciwdziała wyboczeniu i marszczeniu (lokalnemu wyboczeniu) [94].

Właściwości konstrukcji warstwowej są zdeterminowane nie tylko rodzajem wypełniacza, ale także jego stopniem zagęszczenia (pianki), wielkością i kształtem cząstek, temperaturą spieniania, grubością blachy, ułożeniem cząstek (struktura plastra miodu) itp. Widać więc, że na właściwości samego rdzenia ma wpływ wiele czynników, które z kolei wpływają na właściwości całej struktury. W zależności od wymagań konstrukcyjnych i przyszłego zastosowania, należy wybrać odpowiedni rodzaj rdzenia, który nie tylko najlepiej będzie spełniał wymagania ale także będzie najbardziej optymalny pod względem ekonomicznym.

Kompozytowe struktury warstwowe wykorzystywane są m.in. przy produkcji różnego typu łodzi. Elementy te pracują w środowisku wodnym, co niesie za sobą szereg czynników, mogących wpływać na ich szybsze zużycie. Przykładowo oddziaływanie słonej wody morskiej na polimerowe okładziny i rdzeń doprowadzić może do zmian w ich właściwościach. Przedostanie się wody morskiej do konstrukcji ograniczone jest do zewnętrznych powierzchni okładzin, a także kilku sąsiadujących z nimi komórek pianki rdzenia [95]. Jej wpływ na strukturę jest negatywny – woda deformuje komórki.

Kolejne wady, która mogą się pojawić w strukturach warstwowych to łuszczenie się okładzin i rozwarstwianie rdzenia [96]. Ten rodzaj uszkodzeń materiału jest szkodliwy zwłaszcza dla konstrukcji stosowanych do budowy samolotów i statków. Aby przeciwdziałać temu zjawisku przeprowadza się statyczne trójpunktowe testy zginania belek trójwarstwowych.

Materiałem, który zrewolucjonizował w ostatnich latach produkcję struktur kompozytowych jest szkło metaliczne. Posiada ono bardzo dobre właściwości mechaniczne, takie jak duża wytrzymałości oraz plastyczność [97–100]. Jego główną wadą jest skłonność do katastroficznego zniszczenia pod działaniem obciążeń rozciągających. Niemniej jednak odpowiednia konstrukcja kompozytów zawierających szkło ceramiczne pozwala na uzyskanie materiału o wymaganych właściwościach [101].

Materiały dielektryczne mają duże zastosowanie w dziedzinie mikroelektroniki. Są to podstawowe elementy urządzeń mikroelektromechanicznych [102], a także kondensatorów [103, 104]. Należą do nich takie materiały jak polimery, a także odkryty kilka lat temu grafen. Unikalne właściwości grafenu sprawiają, że jest on wykorzystywany jako wypełnienie struktur warstwowych, a tym samym pozwala na uzyskanie dobrych właściwości dielektrycznych, a także polepszenie właściwości mechanicznych [102].

Tlenek cyrkonu, ze względu na swoje unikalne właściwości, znalazł zastosowanie w rdzeniach struktur warstwowych. Do najważniejszych właściwości ZrO_2 można zaliczyć dużą temperaturę topnienia oraz dobre właściwości mechaniczne. W niektórych sytuacjach, stosunkowo duża gęstość tlenku cyrkonu (5–6 g/cm³) stanowi pewne ograniczenie jego zastosowania [104, 105], dlatego też podejmowane są próby wytworzenia związku o mniejszej gęstości i większej wytrzymałości. Pianki ceramiczne są bardzo lekkie, ale w porównaniu do materiałów sypkich, ich wytrzymałość jest stosunkowo mała ze względu na nieuporządkowaną strukturę materiału [107–109]. Struktury warstwowe zapewniają natomiast nie tylko małą gęstość ale i dużą wytrzymałość i sztywność [110–112]. W ostatnim czasie opracowane zostały nowe konstrukcje rdzenia: rdzenie kratownicowe i w postaci pofałdowanej blachy [113]. Wśród wszystkich struktur, rdzenie faliste stanowią najbardziej nowatorską konstrukcję, która odgrywa coraz większe znaczenie w przemyśle, m.in. w produkcji lekkich samolotów, pojazdów transportowych, a także w inżynierii lądowej i wodnej [114–116]. Problemem w konstrukcjach zawierających rdzeń z tlenku cyrkonu jest nie tylko sposób jego wytwarzania ale także odpowiednie określenie właściwości mechanicznych tego materiału.

Na podstawie wielu badań analitycznych i numerycznych można stwierdzić, że struktury warstwowe z rdzeniem w postaci kratownicy mogą być tak sztywne, mocne i lekkie jak te wykonane z sześciokątnych paneli. Jednak w przeciwieństwie do rdzeni o strukturze plastra miodu, te otwarte odpowiedniki nie zatrzymują wilgoci i są bardziej wielofunkcyjne. Ich właściwości wytrzymałościowe w stosunku do masy są doskonałe. Budowa jest analogiczna do dużych konstrukcji (np. wieżowce, mosty, wieże transmisyjne), które zostały produkowane i testowane przez wiele lat. Kluczową kwestią jest znalezienie rozwiązania dotyczącego ich technologii produkcji.

Obciążenia lokalne są jednymi z najczęstszych problemów w strukturach warstwowych ze względu na fakt, że okładziny są o wiele cieńsze od rdzenia, musząc tym samym oprzeć się tym samym wartościom obciążeń co sam rdzeń. Obciążona okładzina zachowuje się jak belka, płyta lub powłoka na podłożu sprężystym (rdzeniu). Oznacza to, że rdzeń nie jest poddany znaczącym odkształceniom lokalnym, co prowadzi do dużych wartości naprężeń ścinających i normalnych. Może to sprzyjać powstawaniu słabych miejsc w strukturze materiału, co znacznie przyspiesza jego zniszczenie. Podobne wyniki otrzymać można dla konstrukcji o złożonym kształcie (np. przekrój powłoki cylindrycznej), nawet w przypadku prostych obciążeń, tj. stałe wewnętrzne ciśnienie.

W celu uwzględnienia tych warunków, w zakresie projektowania i analizy należy zastosować teorię równań wyższego rzędu. Teoria ta może być zastosowana dla różnego rodzaju obciążeń, konstrukcji o nieciągłej budowie i geometrii, a także zawierających poprzeczną elastyczność rdzenia. W niektórych przypadkach miejscowych obciążeń, gdy rdzeń jest ściśnięty, większość stosowanych materiałów na rdzeń ma charakter liniowy w początkowym etapie ścinania, a następnie - nieliniowy.

Do najczęściej stosowanych rodzajów konstrukcji warstwowych, różniących się typem usztywnień, należą panele. Panele warstwowe, o celowo ukształtowanych formach usztywnień pomiędzy

poszyciami, charakteryzują się bardzo dużym, w porównaniu do rozwiązań obecnie stosowanych, współczynnikiem pochłaniania energii w stosunku do masy własnej [118].

Bardzo dobre właściwości konstrukcji warstwowych, a zwłaszcza trójwarstwowych mogą być znacznie lepiej wykorzystane, a wady ograniczone, jeżeli do określenia ich podstawowych parametrów geometrycznych i fizycznych wykorzystane zostaną metody programowania matematycznego. Ich zastosowanie prowadzi do optymalnego projektowania konstrukcji trójwarstwowych [119].

Stosowanie struktur warstwowych na świecie zwiększa się z każdym rokiem. Ich liczne zalety, a także rozwój nowych materiałów oraz potrzeby polepszenia wydajności produkcji sprawiają, że materiały te nadal będą zwiększały swój udział w rynku.

Wyboczenie belek warstwowych na podłożu sprężystym było analizowane przez wielu autorów. Kardomateas [120] zbadał wpływ podłoża sprężystego na analizę wyboczeniową i powyboczeniową rozwarstwionych kompozytów poddanych ściskaniu. Zamodelowanym podłożem sprężystym było podłoże typu Winklera. Laminat złożony był z dwóch części: części znajdującej się powyżej rozwarstwienia (część górna), a także części leżącej poniżej (część dolna). Część środkowa, pokrywająca się z obszarem delaminacji, pełniła funkcję elementu bazowego (rdzenia). Zbadano m.in. wpływ parametrów podłoża sprężystego na wartości obciążeń krytycznych. Analiza wyników wykazała istnienie wąskiego zakresu wartości parametrów podłoża, dla którego obciążenie krytyczne zwiększa się w dość znacznym stopniu. Bardzo ważnym problemem jest zarówno wyboczenie ogólne jak i miejscowe struktur warstwowych. Miejscowe wyboczenie okładziny w kolumnie typu sandwich, z uwzględnieniem podłoża sprężystego, zostało przedstawione w pracy [121]. Badania parametryczne przeprowadzono w celu oceny wpływu m.in. grubości i gestości rdzenia (rdzeń piankowy), grubości okładzin, a także warunków brzegowych na wartości obciążeń krytycznych przy wyboczeniu warstwowej kolumny. Wyniki zostały porównane z rozwiązaniami dostępnymi dla innych kolumn, wykonanych z innego materiału. Badania wykazały mało znaczący wpływ warunków brzegowych na obciążenia krytyczne. Ponadto wartość obciążenia zmniejszała się m.in. wraz ze zwiększaniem się grubości rdzenia oraz ze zmniejszaniem się grubości okładzin. Obciążenie krytyczne zwiększało również swoją wartość wraz ze zwiększaniem się gęstości rdzenia (rozkład liniowy) i okładzin (rozkład nieliniowy). Analiza powyboczeniowa warstwowych płyt na podłożu spreżystym jest często uzupełniana o analizę termiczną [122]. W pracy [122] właściwości materiału zmieniały się wzdłuż grubości płyty. Przedstawione równania zostały wyprowadzone wykorzystując teorię ścinania wyższego rzędu, uzupełnioną o analizę interakcji płyta - podłoże. Badania wykazały, że sztywność podłoża sprężystego, zmiany temperatury, udział objętościowy nanowłókien w okładzinie, a także stosunek grubości rdzenia i okładziny mają znaczący wpływ na wartości obciążeń krytycznych ściskanej płyty oraz zachowanie się konstrukcji w zakresie zakrytycznym (post-buckling). Przeprowadzona analiza wykazała m.in., że wraz ze zwiększaniem się sztywności podłoża zwiększa się temperatura podczas wyboczenia. Ponadto wraz ze zwiększaniem się temperatury zmniejszała się wartość obciążenia. Wzmocnienie okładzin za pomocą materiału typu CNTRC (carbon nanotubereinforced composite) pozwoliło na zwiększenie wartości obciążeń, a także na ogólne zwiększenie sztywności struktury. Analizę dotyczącą wyboczenia płyt typu sandwich, osadzonych na różnych rodzajach sprężystego podłoża, sformułowano w pracy [123]. Zamodelowano podłoże typu Pasternaka o izotropowych lub ortotropowych właściwościach. Rdzeń płyty składał się z ceramiki, natomiast okładziny zbudowane zostały z materiału metalowo - ceramicznego. Dokonano analizy wpływu parametru niehomogeniczności, współczynnika kształtu, stosunku grubości warstw, a także parametrów podłoża na wartości obciążeń krytycznych. Ponadto przeprowadzono badania numeryczne, które dotyczyły symetrycznej płyty prostokątnej typu sandwich, osadzonej na sprężystym podłożu dwuparametrowym (różne warunki brzegowe). Badania wykazały m.in., że wartości obciążeń krytycznych dla przedstawionych płyt mniejsze są niż dla jednowarstwowych płyt ceramicznych. Ponadto obecność podłoża sprężystego prowadzi do znacznego wzrostu zmienności obciążeń wyboczeniowych. Wartości obciążeń były większe w przypadku jednoosiowego ściskania, niż dla ściskania dwuosiowego. Analiza powyboczeniowa płyt typu FG na podłożu sprężystym przedstawiona została w pracy [124]. Zaprezentowano przegląd metod analitycznych i numerycznych. Główna analiza dotyczyła określenia krytycznej wartości przyrostu temperatury, w której płyta traci stabilność. Do obliczeń zastosowano różne modele płyt (o różnych udziałach frakcji metalowych i ceramicznych). Zaobserwowano dużą zgodność przedstawionych wyników z tymi dostępnymi w literaturze. Stabilność asymetrycznej belki stożkowej typu sandwich, spoczywającej na zmiennym podłożu Pasternaka, opisano w pracy [125]. Belka poddana była pulsującemu obciążeniu osiowemu z gradientem termicznym. Model matematyczny został wyprowadzony przy zastosowaniu zasady Hamiltona. Równania ruchu oraz warunki brzegowe uzyskane dzięki zasadzie Hamiltona były wartościami bezwymiarowymi. Zbadano wpływ m.in. kształtu płyty, podłoża sprężystego, gradientu termicznego, parametrów geometrycznych na statyczne obciążenia wyboczeniowe oraz obszary niestabilności. Założono m.in., że ugięcie poprzeczne badanej belki jest małe i takie same na całym przekroju, ugięcie oraz rozciąganie rdzenia jest znikome, a obrotowe efekty bezwładności w poszczególnych warstwach są pomijane. Stabilność belek typu sandwich spoczywających na dwuparametrowym podłożu sprężystym zbadali również inni autorzy [126]. Celem analizy było m.in. określenie krytycznych wartości obciążenia dla badanej belki. Ponadto przeprowadzono badania numeryczne. Wykazały one m.in., że wraz ze zwiększaniem się wskaźnika udziału objętościowego materiału zmniejszają się wartości siły krytycznej w belce. Wraz ze zwiększaniem się wartości stałej sprężyn tworzących podłoże sprężyste, znacząco zwiększa się wyboczenie. Jest ono tym większe, im większe są wartości stałych sprężyn tworzących warstwę ścinającą. Ponadto stwierdzono, że wartości obciążeń krytycznych zmniejszają się wraz ze zmniejszaniem się grubości belki.

Kolejnym zagadnienie w przypadku konstrukcji warstwowych jest analiza dynamiczna belek i innych struktur na podłożu sprężystym. Drgania sprężystej belki typu sandwich na podłożu sprężystym przedstawiono w pracy [127]. Do opisu kinematyki warstw wierzchnich zastosowano hipotezy Bernoulliego. Założono, że rdzeń jest sztywny i ściśliwy. Reakcja podłoża sprężystego została opisana modelem Winklera. Przeprowadzono badania dla belki trójwarstwowej o małej, średniej i dużej sztywności podłoża sprężystego. Uzyskane wyniki analityczne i numeryczne pozwalają wnioskować, że podłoże sprężyste o średniej i dużej sztywności ma znaczący wpływ na wartości naturalnych częstotliwości drgań belki. Wpływ podłoża o małej sztywności można w niektórych przypadkach pominąć w analizie drgań. Drgania swobodne belki trójwarstwowej można obliczyć wykorzystując metodę sztywności dynamicznej oraz metody doświadczalne [128]. Dokładna matryca sztywności dynamicznej belki o asymetrycznym przekroju poprzecznym została opracowana przy wykorzystaniu teorii dla belek Timoszenki, zasady Hamiltona oraz symbolicznych obliczeń. Wyniki badań pokrywały się z poprzednimi rezultatami, dotyczącymi belek trójwarstwowych na podłożu sprężystym. Termomechaniczna analiza drgań belek FG typu sandwich spoczywających na podłożu sprężystym została sformułowana w pracy [129]. Belki osadzone zostały na dwuparametrowym podłożu sprężystym. Właściwości materiału zmieniały się wzdłuż grubości. Otrzymane wyniki były zgodne z tymi dostępnymi w literaturze. Zauważono, że przy małych wartościach temperatur, częstotliwość naturalna belki jest silnie uzależniona od warunków brzegowych. W pracy [130] opisano stabilność dynamiczną belek na podłożu Winklera. Badania dotyczyły analizy numerycznej, która wykazała m.in., że częstotliwość drgań własnych belki typu FGO (functionally graded ordinary) zwiększała się wraz ze zwiększaniem się wartości parametru podłoża sprężystego. W przypadku belek typu FGSW (functionally graded sandwich) stwierdzono, że wartości obciażenia krytycznego zwiększają się wraz ze zwiększaniem się sztywności podłoża. Ponadto zauważono że obciażenie zwiekszało się wraz ze wzrostem grubości rdzenia. Czestotliwości, a także stabilność belki zwiększały się wraz ze zwiększaniem się wartości modułu podłoża Winklera. Analiza dynamiczna belek warstwowych na podłożu sprężystym opisana została w pracy [131]. Belki zostały poddane harmonicznym obciążeniom osiowym. Celem zwiększenia wartości dynamicznych obciażeń wyboczeniowych zamodelowano dodatkowa warstwe elektroreologiczna, która pełniła funkcję rdzenia. Obliczono numerycznie wartości dynamicznych obciążeń krytycznych, poprzez zbadanie zachowania się belki przy różnych wartościach amplitudy obciążenia. Badania parametryczne dotyczyły określenia wpływu geometrii belki, sztywności podłoża, obciążenia statycznego, zastosowanego napięcia, a także właściwości rdzenia na wartości obciażeń krytycznych oraz obszary stabilności w belce. Badania wykazały, że zastosowanie pola elektrycznego w warstwie rdzenia zwiększa stateczność dynamiczną belki (większe wartości obciążeń). Ponadto podłoże sprężyste redukuje obszary niestabilności w badanej konstrukcji. Inne badania [132] dotyczyły analizy drgań belki typu sandwich o zmiennym przekroju poprzecznym, osadzonej na zmiennym podłożu sprężystym Winklera. Sprężystość i gęstość belki zmieniały się wzdłuż jej grubości. Każda warstwa była izotropowa i jednorodna, jednakże udział frakcji objętościowej składników w każdej warstwie był niejednolity. Ponadto szerokość belki zmieniała się w sposób wykładniczy wzdłuż długości. Wyniki badań analitycznych zostały porównane z wynikami badań numerycznych. Badania wykazały m.in., że zwiększenie udziału objętościowego ceramiki w belce symetrycznej powoduje zmniejszenie wartości częstotliwości drgań własnych. Ponadto częstotliwość zwiększała się wraz ze zwiększaniem się wartości współczynnika sprężystości podłoża. Saidi i inni [133] przedstawili badania dotyczące drgań swobodnie podpartej płyty warstwowej typu FG, spoczywającej na podłożu sprężystym Winklera-Pasternaka. W modelu matematycznym założono, że odkształcenia zmieniają się sinusoidalnie wzdłuż grubości, natomiast naprężenia ścinające osiągają wartość zerową na górnej i dolnej powierzchni płyty. Porównano ze sobą wyniki przeprowadzonych badań numerycznych oraz tych dostępnych w literaturze. Przedstawiono m.in. wartości częstotliwości drgań własnych dla różnych wartości parametrów podłoża Winklera-Pasternaka. Analiza wykazała, że wraz ze zwiększaniem się wartości parametrów podłoża sprężystego zwiększała się wartości częstotliwości drgań własnych konstrukcji. Kolejne badania [134] dotyczyły drgań swobodnych niesymetrycznych belek typu sandwich spoczywających na sprężystym podłożu Pasternaka i obciążonych pulsującą siła osiowa. Zbadano (w sposób numeryczny) m.in. wpływ zmiennych parametrów podłoża sprężystego, stosunku długości belki do grubości warstwy sprężystej, stosunku modułu warstwy ścinającej podłoża do modułu Younga warstwy sprężystej, stosunku modułu ścinania rdzenia do modułu Younga warstwy sprężystej oraz stosunku grubości sprężystej warstwy Pasternaka do długości belki na wartość naturalnej częstotliwości belki. Na podstawie badań można stwierdzić, że zniszczenia konstrukcji można uniknąć wtedy, gdy żadna z wartości naturalnej częstotliwości drgań belki nie odpowiada wartości częstotliwości wzbudzenia. Drgania płyt typu sandwich, spoczywających na podłożu sprężystym przedstawiono w pracy [135]. Do wyprowadzenia modelu matematycznego wykorzystano teorie ścinania pierwszego rzedu, która obejmuje ważne aspekty dotyczące odkształcenia poprzecznego oraz bezwładności obrotowej. Zbadano m.in. wpływ udziału objętościowego, grubości warstw oraz warunków brzegowych na częstotliwość drgań własnych płyty. Ponadto zbadano wpływ stałych spreżyn na odpowiedź układu. Analiza wykazała, że stałe spreżyny w dużym stopniu wpływają na zmiany częstotliwości drgań własnych płyty. Wraz ze zwiększaniem się stałej sprężyny, zwiększa się wartość częstotliwości. Nieliniowa charakterystyka dynamiczna oraz stateczność kompozytowej, ortotropowej płyty na podłożu sprężystym Winklera-Pasternaka została zaprezentowana w pracy [136]. W analizie uwzględniono efekty termiczne. Przedstawiono charakterystyki częstotliwości drgań własnych, drgań liniowych i nieliniowych, krzywe amplitud częstotliwości, a także nieliniową dynamiczną charakterystykę badanej płyty. Wyniki porównano z tymi, dostępnymi w literaturze. Wyznaczono wartości obciążeń krytycznych. Ponadto zbadano wpływ m.in. zmian temperatury, trybów wyboczenia, właściwości podłoża sprężystego oraz imperfekcji na charakterystykę płyty. Zauważono, że wartości dynamicznych obciążeń krytycznych są większe od obciążeń statycznych. Analiza termiczna wykazała, że zwiększenie temperatury powoduje zwiększenie wartości osiowych naprężeń ściskających i dodatkowo zmniejsza poprzeczną sztywność płyty. Na stabilność dynamiczną płyty wpływają również stałe podłoża sprężystego. Yarovaya przedstawił termosprężyste zginanie kołowej płyty warstwowej z lekkim rdzeniem na podłożu sprężystym [137]. Reakcja podłoża została opisana modelem Winklera. Płyta została poddana działaniu lokalnego, symetrycznego obciążenia termomechanicznego. Analiza numeryczna wykazała, że przy zwiększaniu sztywności podłoża, ugięcie przestaje osiągać swoją maksymalną wartość w środku długości konstrukcji, natomiast naprężenie ścinające zmienia swój znak wzdłuż promienia płyty. Przy dalszym zwiększaniu sztywności płyty wpływ temperatury na przemieszczenia staje się coraz mniejszy. Sprężyste właściwości rdzenia wykazują niewielki wpływ na ugięcie płyty, podczas gdy wartości naprężeń termomechanicznych zmniejszają się kilkukrotnie na granicy pomiędzy górną okładziną a rdzeniem. Zginanie swobodnie podpartej, lepkosprężystej belki typu sandwich, spoczywającej na sprężystym podłożu Pasternaka zbadali Zenkour i inni [138]. Okładziny zostały wykonane z materiału lepkosprężystego, natomiast rdzeń z materiału sprężystego. Właściwości materiału zmieniały się stopniowo od okładzin w kierunku rdzenia. Przeprowadzono analize numeryczną związaną z ugięciem oraz naprężeniami w badanej belce. Wyniki porównano z tymi otrzymanymi przy zastosowaniu prostej, sinusoidalnej teorii ścinania dla belek, teorii ścinania pierwszego rzędu, a także teorii wyższego rzędu. Naprężenia występujące pomiędzy poszczególnymi warstwami w kompozytowej, laminowanej belce typu sandwich, spoczywającej na podłożu sprężystym i poddanej działaniu obciążeń poprzecznych przedstawiono w pracy [139]. Badania dotyczyły statycznej analizy konstrukcji na podłożu Winklera. Na podstawie przeprowadzonej analizy można stwierdzić, że naprężenia normalne wykazują prosty rozkład wzdłuż grubości laminatu, podczas gdy rozkład naprężeń ścinających zmienia się w poszczególnych warstwach belki. Problemy z delaminacją struktur na podłożu sprężystym opisano także w pracy [140].

Płyty typu FG spoczywające na podłożu sprężystym mogą być również badane przy zastosowaniu hiperbolicznej teorii ścinania. Teoria ta uwzględnia hiperboliczny rozkład poprzecznego odkształcenia ścinającego i zakłada, że odpowiadające mu naprężenia ścinające są równe zeru na górnej i dolnej powierzchni płyty. Metoda ta nie stwarza konieczności stosowania jakichkolwiek dodatkowych współczynników korekty ścinania. W pracy [141] hiperboliczna teoria ścinania została zastosowana do analizy kompozytowej płyty typu FG, składającej się z ceramiki (tlenek cyrkonu) i metalu (stop tytanu) i spoczywającej na dwuparametrowym podłożu sprężystym typu Winkler-Pasternak. Omówiono m.in. wpływ różnych warunków brzegowych, wartości współczynników warstw Winklera i Pasternaka, czy kształtu płyty na wartości ugięć i naprężeń w płycie. Przeprowadzona analiza wykazała, że zastosowana hiperboliczna teoria ścinania jest bardziej dokładna od wcześniejszych stosowanych metod (m.in. sinusoidalnej teorii ścinania, teorie ścinania wyższych rzędów).

Analiza termiczna definiowana jest jako zespół metod badania zmian wybranych właściwości fizycznych substancji pod wpływem działania temperatury. Metody termiczne, zależnie od sposobu ogrzewania badanego elementu, można podzielić na statyczne i dynamiczne. Analiza termiczna dostarcza wielu informacji dotyczących zmian wybranych właściwości substancji pod wpływem

zmieniającej się w określony sposób temperatury. Badania z wykorzystaniem termicznej analizy konstrukcji na podłożu sprężystym zostały przeprowadzone przez wielu autorów. Zenkour i Sobhy zaprezentowali termiczna analize wyboczenia różnego rodzaju płyt typu sandwich [142]. Do obliczeń zastosowano sinusoidalną teorię ścinania dla płyt. Przyjęto, że właściwości materiału oraz współczynnik rozszerzalności cieplnej powierzchni płyty warstwowej są stopniowane po grubości. Założono, że warstwa rdzenia jest jednorodna i wykonana z materiału izotropowego. W pracy przedstawiono kilka przykładów symetrycznych płyt warstwowych. Przyjęto, że obciążenia termiczne są równomierne, a ich rozkład na grubości płyty jest liniowy i nieliniowy. Otrzymane wyniki mogą posłużyć do analizy porównawczej warstwowych płyt utwierdzonych oraz tych osadzonych na podłożu sprężystym. Dwuwymiarowa analiza drgań swobodnych belek warstwowych na podłożu sprężystym, poddanych działaniu temperatury, została przedstawiona w pracy [143]. Założono, że właściwości materiału okładzin są zależne od temperatury i zmieniają się po grubości. Belka składała się z dwóch zewnętrznych warstw okalających (okładzin), wykonanych z materiału typu FG oraz z rdzenia, składającego się z jednorodnego, izotropowego materiału. Ponadto cała konstrukcja spoczywała na dwuparametrowym podłożu sprężystym (typu Winklera-Pasternaka). Obliczono częstotliwości drgań belki, uwzględniając przy tym z góry określone indukowane termicznie naprężenia. Zbadano wpływ kilku parametrów, m.in. wzrostu temperatury, sztywności podłoża, sztywności poszczególnych warstw belki czy warunków brzegowych na czestotliwość drgań własnych konstrukcji. W każdym z rozpatrywanych przypadków stwierdzono istotny wpływ temperatury na otrzymane wyniki. Termiczna i mechaniczna analiza wyboczenia płyt typu sandwich z okładzinami wykonanymi z materiału typu FG została opisana w pracy [144]. Płyta spoczywała na dwuparametrowym podłożu sprężystym, które uzyskano przez dodanie warstwy ścinającej (warstwa Pasternaka) do modelu Winklera. Zbadano m.in. wpływ parametrów podłoża sprężystego i wymiarów geometrycznych płyty na jej wyboczenie. Założono, że płyta jest swobodnie podparta na wszystkich krawędziach. Zastosowanie warstwy Winklera pozwoliło na odsunięcie punktu bifurkacji w kierunku większych wartości obciażeń. W przypadku niestabilności termicznej i mechanicznej, stała Winklera ma zauważalny wpływ na postać wyboczenia płyty, natomiast w przypadku parametru podłoża Pasternaka rodzaj wyboczenia lub równomierne dwukierunkowe obciążenia nie zmieniają trybów wyboczenia. Zwiększanie wartości powyższych parametrów odsuwa punkt bifurkacji. Ponadto stwierdzono, że m.in. współczynnik kształtu, stosunek grubości do szerokości oraz grubości rdzenia do grubości okładzin wykazują zauważalny wpływ na wartości obciążeń krytycznych oraz temperaturę. Laminaty typu włókno – metal (FML - fiber-metal laminate) to nowa klasa materiałów metalowych, składająca się z kliku warstw metalu, połączonych warstwami włókien. Dzięki temu materiał zachowuje się jak metalowa konstrukcja. Posiada on jednak lepsze właściwości mechaniczne, tj. udarność, odporność termiczną czy odporność na korozję. Połączenie tych zalet w jednym materiale sprawia, że laminaty te są doskonałym materiałem do produkcji struktur kadłubowych. Nieliniowa odpowiedź dynamiczna belki laminowanej na podłożu spreżystym została zbadana w pracy [145]. Belka została poddana działaniu ruchomego obciążenia harmonicznego oraz obciążenia termicznego. Podłoże sprężyste było odporne na rozciąganie, przenosiło wyłącznie obciążenia ściskające. Badania wykazały, że im większa jest sztywność podłoża, tym mniejsze będzie ugięcie belki typu *FML*. Kąt nachylenia warstwy włókien ma niewielki wpływ na maksymalne ugięcie konstrukcji. Ponadto w miarę zwiększania się obciążeń termicznych zwiększało się ugięcie belki.

Analiza belek na podłożu sprężystym została zaprezentowana przez wielu autorów. Większość z nich przedstawia fizyczny model podłoża jako układ nieskończenie wielu sprężyn. Założenie to niejednokrotnie może powodować trudności przy tworzeniu modelu matematycznego. We wszystkich rozpatrywanych przypadkach, wyniki badań analitycznych zależne sa od charakterystyk sprężyn. Do najważniejszych czynników determinujących właściwości belek na podłożu sprężystym zaliczyć można sztywność sprężyn, a także ich położenie względem utwierdzenia belki. Ponadto większość problemów dotyczących belek na sprężystych podłożach jest opisywana przy pomocy modelu Winklera. Model ten jest niewystarczający przy rozwiązywaniu wielu problemów technicznych. Główna jego wada jest fakt, iż w analizie modelu pomija się efekt ścinania pomiędzy elementami sprężynowymi. Analizując dotychczasowy stan wiedzy nie znaleziono innych modeli sprężystego podłoża niż układy sprężyn. W niniejszej pracy zaprezentowano nowe rozwiązanie analityczne dotyczące belek jednorodnych i trójwarstwowych na podłożu sprężystym. Rozpatrywane podłoże zostało opisane funkcja matematyczna. Kształt podłoża jest uwarunkowany kształtem wykresu funkcji, która go opisuje. Można go zatem opisać dowolną funkcją, zgodną z warunkami brzegowymi. Ponadto w pracy zaprezentowano oryginalną funkcję ugięcia konstrukcji jednorodnych i trójwarstwowych. Wstępne badania były prezentowane na konferencjach miedzynarodowych: 6th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 6) an d7th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD 7) w Glasgow w 2018 roku oraz 4th Congress of Mechanics and 23rd International Conference on Computer Methods in Mechnics (PCM-CMM) w Krakowie w 2019 roku.

Praca dotyczy badań podstawowych w zakresie modelowania analitycznego i numerycznego wyboczenia (obciążeń krytycznych). Przedmiotem badań opisanych w niniejszej pracy są belki jednorodne i trójwarstwowe z rdzeniem w postaci pianki aluminiowej, spoczywające na sprężystym podłożu. W rozdziale pierwszym przedstawiono przegląd literatury dotyczący wielu zagadnień związanych z konstrukcjami jednorodnymi i warstwowymi. Zaprezentowano najważniejsze właściwości tego typu struktur, a także przegląd dotychczasowych badań analitycznych i numerycznych dotyczących m.in. zjawiska wyboczenia konstrukcji. W rozdziale drugim sformułowano cel i zakres pracy. Określono główne tezy rozprawy doktorskiej, a także zadania badawcze. W rozdziale trzecim przedstawiono własny model analityczny zjawiska wyboczenia belki jednorodnej i trójwarstwowej. Zapisano równania równowagi dla konstrukcji wraz z rozwiązaniami. Rozdział czwarty dotyczył analizy *MES*. Utworzono modele belek w systemie SolidWorks,

zdefiniowano warunki brzegowe, a następnie wyznaczono numerycznie wartości obciążeń krytycznych dla wybranych rodzin belek.

Podjęta w rozprawie tematyka badawcza jest zgodna ze współczesnymi badaniami światowymi i stanowi wkład w jej rozwój. W ostatnich latach można zauważyć znaczny wzrost liczby publikacji dotyczących problemów stateczności konstrukcji na podłożach sprężystych.

Koncepcja rozprawy doktorskiej

- <u>Cel Pracy:</u> Wprowadzenie uogólnienia znanych modeli podłoża sprężystego polegającego na przyjęciu jego zmiennych właściwości. Modelowanie matematyczne jednorodnej i trójwarstwowej belki na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach geometrycznych podłoża, podpartych przegubowo. Rozwiązanie analityczne dotyczące belek poddanych ściskaniu w płaszczyznach osiowych. Numeryczne badania metodą elementów skończonych przy użyciu programu SolidWorks. Wyznaczenie obciążeń krytycznych dla dwóch rodzajów belek. Porównanie otrzymanych wyników analitycznych i numerycznych.
- <u>Tezy pracy:</u> Wartości sił krytycznych w badanych belkach zależą od właściwości geometrycznych podłoża. Wraz ze zmianą wartości parametru k oraz parametru przesunięcia funkcji kształtu p (belki jednowarstwowe o niesymetrycznych właściwościach podłoża) zmieniają się wartości obciążeń krytycznych F_{0,CR}. Podobną sytuację można zaobserwować w przypadku belek trójwarstwowych.

Cel pracy zostanie osiągnięty dzięki wykonaniu następujących zadań:

- 1. Modelowanie matematyczne jednorodnej i trójwarstwowej belki na podłożu sprężystym podpartych przegubowo, w tym
 - sformułowanie równania różniczkowego linii ugięcia belki jednorodnej z uwzględnieniem sprężystych właściwości podłoża;
 - *założenie funkcji określającej kształt podłoża sprężystego;*
 - wyznaczenie wzoru na siłę krytyczną ściskanej belki jednorodnej na podłożu sprężystym;
 - przykładowe obliczenia wyznaczenie obciążeń krytycznych dla wybranych rodzin belek;
 - zdefiniowanie pola przemieszczeń deformacji prostej normalnej do płaszczyzny środkowej belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym;
 - określenie odkształceń, naprężeń, energii odkształcenia sprężystego, energii kinetycznej i pracy obciążenia;
 - wyprowadzenie układu równań równowagi z zasady stacjonarności całkowitej energii potencjalnej;
 - przykładowe obliczenia wyznaczenie obciążeń krytycznych dla wybranych rodzin belek trójwarstwowych;

- porównanie wyników dla belek jednorodnych i trójwarstwowych na podłożu sprężystym.
- 2. Modelowanie numeryczne jednorodnych i trójwarstwowych belek na podłożu sprężystym, w tym
 - *utworzenie modeli numerycznych belek w systemie SolidWorks;*
 - *zdefiniowanie warunków brzegowych;*
 - wyznaczenie numeryczne obciążeń krytycznych dla wybranych rodzin belek.
- 3. Analiza porównawcza wyników otrzymanych metodami analitycznymi i numerycznymi.
- 4. Sformułowanie wniosków.
Badania analityczne Belki jednorodne na podłożu sprężystym

Model został wyprowadzony w oparciu o liniowe właściwości belki jednorodnej [146]. Schemat badanej belki przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Schemat belki jednorodnej

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki przedstawiono za pomocą równania:

$$EJ_{z}\frac{d^{4}v}{dx^{4}} + F_{0}\frac{d^{2}v}{dx^{2}} = -q_{f}(x), \qquad (1)$$

gdzie $q_f(x)$ jest intensywnością obciążenia – reakcją podłoża sprężystego $\left[\frac{N}{mm}\right]$ i $q_f(x) = c(x) \cdot v(x)$; c(x) jest właściwością – stałą podłoża $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$, a v(x) jest ugięciem belki [mm]. Zatem, równanie (1) można zapisać w następującej postaci:

$$EJ_{z}\frac{d^{4}v}{dx^{4}} + F_{0}\frac{d^{2}v}{dx^{2}} + c(x) \cdot v(x) = 0.$$
⁽²⁾

Funkcję kształtu (rys. 3) dla zmiennych właściwości belki (podłoża sprężystego) zapisano:

$$c(x) = c_0 - c_1 \sin^k(\pi\xi),$$
 (3)

gdzie $\xi = \frac{x}{L}$; $0 \le \xi \le 1$; a *k* jest liczbą naturalną.

Na rysunku 4 pokazano kształt wykresu funkcji (3) w zależności od przyjętej wartości parametru k. Z rysunku wynika, że parametr k ma istotny wpływ na postać wykresu funkcji (3). Funkcję ugięcia założono w następującej postaci:

$$v(x) = v_a \cdot \sin(m\pi\xi) \cdot \sin^n(\pi\xi), \tag{4}$$

gdzie m i n są liczbami naturalnymi, a v_a amplitudą ugięcia.

Podstawiając funkcje (3) i (4) do równania (2), otrzymano:

$$\Phi(\xi) = \pi^4 E J_z \frac{v_a}{L^4} \cdot f_4(\xi) + F_0 \cdot \pi^2 \frac{v_a}{L^2} \cdot f_2(\xi) + [c_0 - c_1 sin^k(\pi\xi)] \cdot v_a sin(m\pi\xi) sin^n(\pi\xi) = 0,$$
(5)

gdzie f₂ i f₄ są pochodnymi równania (4) odpowiednio drugiego i czwartego rzędu.



Rys. 4. Kształty wykresu funkcji w zależności od wartości parametru k

Stosując metodę Galerkina, zapisano warunek:

$$\int_{0}^{1} \Phi(\xi) \cdot \sin(m\pi\xi) \sin^{n}(\pi\xi) d\xi = 0.$$
(6)

Po wykonaniu całkowania, otrzymano równanie algebraiczne

$$\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 E J_z \cdot J_4 - F_0 \cdot J_2 + \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \cdot J_0 = 0, \tag{7}$$

z którego wyznaczono obciążenie

$$F_0 = \frac{1}{J_2} \left[J_4 \cdot F_{EULER} + \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \cdot J_0 \right],\tag{8}$$

gdzie

$$F_{EULER} = \frac{\pi^2 E J_Z}{L^2},\tag{9}$$

$$J_4 = \left(\frac{1}{\pi}\right)^4 \int_0^1 \frac{d^4\tilde{v}}{d\xi^4} \cdot \sin(m\pi\xi) \cdot \sin^n(\pi\xi) d\xi, \tag{10}$$

$$J_2 = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{d^2\tilde{v}}{d\xi^2} \cdot \sin(m\pi\xi) \cdot \sin^n(\pi\xi) d\xi,\tag{11}$$

38

$$J_0 = \int_0^1 [c_0 - c_1 \sin^k(\pi\xi)] \, [\sin(m\pi\xi)\sin^n(\pi\xi)]^2 d\xi.$$
(12)

Obciążenie krytyczne $F_{0,CR}$ jest funkcją parametrów geometrycznych i mechanicznych belki jednorodnej oraz liczb *m* i *n*, zatem:

$$F_{0,CR} = \min_{m,n} \left\{ \frac{J_4 \cdot F_{EULER} + \left(\frac{L^2}{\pi}\right) \cdot J_0}{J_2} \right\}.$$
 (13)

Dokonano obliczeń wartości obciążeń krytycznych i naprężeń dla zmiennych wartości parametrów *m* i *n* oraz dla następujących danych liczbowych: $c_0 = 10 MPa$, $E = 200\ 000\ MPa$, $L = 1200\ mm$, $J_z = 240\ mm^4$ oraz $A = 180\ mm^2$. Wyniki uzyskane dla różnych wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru *k* zestawiono w tabelach 1–9.

Obliczenia przedstawione w tabelach odnoszą się do sprężystego podłoża o zmiennych właściwościach mechanicznych. Porównując poniższe wyniki z podłożem o stałych parametrach $(c_1 = 0, \text{ wtedy } n = 0)$ oraz podstawiając następujące dane $J_4 = 2048, J_2 = 32, J_0 = 5$ i m = 8, obliczono wartości obciążeń krytycznych. Otrzymane wartości są takie same jak te obliczone za pomocą równania (13) i odnoszące się do zmiennych właściwości podłoża sprężystego. Krytyczna wartości obciążenia dla stałych i zmiennych właściwości podłoża jest taka sama w obu przypadkach i wynosi $F_{0,CR} = 43,852$ kN.

Tabela 1. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 1)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	43,221	41,316	39,404	36,779	34,154	31,530	28,179	24,585
σ_{CR} [MPa]	240,1	229,5	218,9	204,3	189,7	175,2	156,6	136,6
т	8	8	7	7	7	7	6	6
п	1	1	2	2	2	2	3	3

Tabela 2. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 3)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	43,602	42,078	40,364	38,279	35,868	33,490	30,972	27,402
σ_{CR} [MPa]	242,2	233,8	224,2	212,7	199,3	186,1	172,1	152,2
т	8	8	8	7	7	7	6	6
n	1	1	2	2	3	3	4	4

Tabela 3. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 5)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	43,820	42,481	40,941	39,110	36,949	34,703	32,444	29,466
σ_{CR} [MPa]	243,4	236,0	227,5	217,3	205,3	192,8	180,2	163,7
т	8	8	8	7	7	7	7	6
п	1	2	2	3	3	4	4	4

		()						
$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	44,114	43,068	41,820	40,513	38,577	36,641	34,705	32,770
σ_{CR} [MPa]	245,1	239,3	232,3	225,1	214,3	203,6	192,8	182,1
m	8	8	8	7	7	7	7	7
п	1	2	2	4	4	4	4	4

Tabela 4. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 10)

Tabela 5. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 15)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	44,271	43,412	42,337	41,262	39,584	37,849	36,115	34,381
σ_{CR} [MPa]	246,0	241,2	235,2	229,2	219,9	210,3	200,6	191,0
т	8	8	8	8	7	7	7	7
n	1	2	2	2	4	4	4	4

Tabela 6. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 20)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	44,373	43,620	42,694	41,738	40,252	38,651	37,050	35,449
σ_{CR} [MPa]	246,5	242,3	237,2	231,9	223,6	214,7	205,8	196,9
т	8	8	8	8	7	7	7	7
n	1	1	2	2	4	4	4	4

Tabela 7. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 30)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	44,509	43,892	43,190	42,400	41,054	39,614	38,173	36,733
σ_{CR} [MPa]	247,3	243,8	240,0	235,6	228,1	220,1	212,1	204,1
т	8	8	8	8	7	7	7	7
n	1	1	2	2	4	4	4	4

Tabela 8. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 40)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	44,603	44,080	43,543	42,860	41,511	40,162	38,813	37,465
σ_{CR} [MPa]	247,8	244,9	242,0	238,1	230,6	223,1	215,6	208,1
т	8	8	8	7	7	7	7	7
n	1	1	2	4	4	4	4	4

Tabela 9. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 50)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	44,675	44,223	43,771	43,102	41,814	40,526	39,238	37,949
σ_{CR} [MPa]	248,2	245,7	243,2	239,5	232,3	225,1	218,0	210,8
т	8	8	8	7	7	7	7	7
п	1	1	1	4	4	4	4	4

Wyniki zestawione w tabelach przedstawiono w formie graficznej na wykresach 5 i 6. Wartości obciążeń krytycznych są zależne od wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru k. Największe wartości $F_{0,CR}$ uzyskano dla największych wartości parametru k oraz dla najmniejszej wartości stosunku c_1/c_0 . Największe obciążenie wyniosło $F_{0,CR} = 44,675 \ kN$ i otrzymano je dla k = 50 oraz $c_1/c_0 = 0,1$.



Rys. 5. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych



Rys. 6. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru k na wartości obciążeń krytycznych

Tabele 1–9 przedstawiają wyniki dla naturalnych wartości parametru k. W tabelach 1018 przedstawiono obliczenia dla wymiernych wartości wykładnika potęgowego funkcji (3). Największe wartości $F_{0,CR}$ uzyskano, tak jak w poprzednim przypadku, dla największych wartości parametru k oraz dla najmniejszej wartości stosunku c_1/c_0 . Największe obciążenie wyniosło $F_{0,CR} = 43,072 \ kN$ i otrzymano je dla $k = \frac{1}{2}$ oraz $c_1/c_0 = 0,1$. Wyniki zestawione w tabelach przedstawiono w formie graficznej na wykresach 7 i 8.

j		2)						
$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	43,072	41,018	38,909	36,239	33,520	30,768	27,117	23,407
σ_{CR} [MPa]	239,3	227,9	216,2	201,3	186,2	170,9	150,7	130,0
m	8	8	7	7	7	7	6	6
n	1	1	1	1	2	2	2	2

Tabela 10. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}\right)$

Tabela 11. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{3}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	43,014	40,902	38,683	35,937	33,192	30,446	26,678	22,905
σ_{CR} [MPa]	239,0	227,2	214,9	199,7	184,4	169,1	148,2	127,3
т	8	8	7	7	7	7	6	6
п	1	1	1	1	1	1	2	2

Tabela 12. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{4}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	42,983	40,840	38,562	35,777	32,991	30,205	26,450	22,617
σ_{CR} [MPa]	238,8	226,9	214,2	198,8	183,3	167,8	146,9	125,7
m	8	8	7	7	7	7	6	5
n	1	1	1	1	1	1	2	2

Tabela 13. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{5}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	42,964	40,802	38,487	35,677	32,866	30,055	26,302	22,391
σ_{CR} [MPa]	238,7	226,7	213,8	198,2	182,6	167,0	146,1	124,4
т	8	8	7	7	7	7	6	5
п	1	1	1	1	1	1	1	2

Tabela 14. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{6}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	42,951	40,776	38,436	35,608	32,781	29,953	26,140	22,239
σ_{CR} [MPa]	238,6	226,5	213,5	197,8	182,1	166,4	145,2	123,6
т	8	8	7	7	7	7	6	5
n	1	1	1	1	1	1	1	2

		(7)						
$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	42,942	40,757	38,399	35,559	32,719	29,860	26,022	22,130
σ_{CR} [MPa]	238,6	226,4	213,3	197,6	181,8	165,9	144,6	122,9
т	8	8	7	7	7	6	6	5
n	1	1	1	1	1	1	1	2

Tabela 15. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{7}\right)$

Tabela 16. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{8} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	42,934	40,742	38,371	35,521	32,672	29,784	25,933	22,047
σ_{CR} [MPa]	238,5	226,3	213,2	197,3	181,5	165,5	144,1	122,5
m	8	8	7	7	7	6	6	5
п	1	1	1	1	1	1	1	2

Tabela 17. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{9}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	42,929	40,731	38,349	35,492	32,635	29,724	25,863	21,982
σ_{CR} [MPa]	238,5	226,3	213,1	197,2	181,3	165,1	143,7	122,1
т	8	8	7	7	7	6	6	5
n	1	1	1	1	1	1	1	2

Tabela 18. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{10}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	42,924	40,722	38,331	35,468	32,605	29,675	25,807	21,902
σ_{CR} [MPa]	238,5	226,2	213,0	197,0	181,1	164,9	143,4	121,7
т	8	8	7	7	7	6	6	5
n	1	1	1	1	1	1	1	1



Rys. 7. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych



Rys. 8. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru k na wartości obciążeń krytycznych

Powyższe rozwiązanie analityczne dotyczyło belki jednorodnej o symetrycznych właściwościach podłoża sprężystego. Dalsza część badań przedstawia belkę o niesymetrycznych właściwościami podłoża. Równanie różniczkowe linii ugięcia belki jest takiej samej postaci, czyli:

$$EJ_{z}\frac{d^{4}v}{dx^{4}} + F_{0}\frac{d^{2}v}{dx^{2}} + c(x) \cdot v(x) = 0.$$
(14)

Zmianie ulega równanie określające kształt podłoża sprężystego (funkcja kształtu). Równanie uzupełniono o parametr przesunięcia - p. W modelu założono przesunięcie funkcji w stosunku do prawego końca belki (przesunięcie w stosunku do lewego końca belki skutkuje zmianą znaku wrównaniu (15) z "-" na "+"). Na rysunku 9 przedstawiono kształty wykresu funkcji (15) w zależności od wartości parametru k, dla przesunięcia p = 0,1 oraz p = 0,3.



Rys. 9. Kształty wykresu funkcji w zależności od wartości parametru k dla belki o niesymetrycznych właściwościach podłoża sprężystego

44

Funkcję ugięcia przedstawia równanie (4). Równanie różniczkowe belki można ostatecznie zapisać następująco:

$$\Phi(\xi) = \pi^4 E J_z \frac{v_a}{L^4} \cdot f_4(\xi) + F_0 \cdot \pi^2 \frac{v_a}{L^2} \cdot f_2(\xi) + [c_0 - c_1 \sin[\pi(\xi - p)]^k] \cdot v_a \sin(m\pi\xi) \sin^n(\pi\xi) = 0, \quad (16)$$

gdzie f_2 i f_4 są pochodnymi równania (4) odpowiednio drugiego i czwartego rzędu.

Do obliczenia krytycznej wartości obciążenia ponownie zastosowano metodę Galerkina. Warunek, rozwiązanie algebraiczne oraz wzór na obciążenie przedstawiają odpowiednio równania (6–8). Równania (9–11) są takie same dla belki o symetrycznych jak i niesymetrycznych właściwościach. Zmianie ulega równanie (12), które można zapisać w postaci:

$$J_0 = \int_0^1 [c_0 - c_1 \sin\left[\pi(\xi - p)\right]^k] \, \left[\sin(m\pi\xi) \sin^n(\pi\xi)\right]^2 d\xi.$$
(17)

Końcowe równanie można zapisać tak samo, jak w przypadku belki o symetrycznych właściwościach:

$$F_{0,CR} = \min_{m,n} \left\{ \frac{J_{4} \cdot F_{EULER} + \left(\frac{L^{2}}{\pi}\right) \cdot J_{0}}{J_{2}} \right\}.$$
 (18)

Dokonano obliczeń wartości obciążeń krytycznych i naprężeń dla zmiennych wartości parametrów *m* i *n* oraz dla następujących danych liczbowych: $c_0 = 10 MPa$, $E = 200\ 000\ MPa$, $L = 1200\ mm$, $J_z = 240\ mm^4$ i $A = 180\ mm^2$. Wyniki uzyskane dla różnych wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametrów *k* i *p* zestawiono w tabelach 19–27.

Tabela 19.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla belki	i jednorodnej	na podłożu	sprężystym
o zmienny	ch właściw	vościach ((k = 1)						

c_1 / c_0	0,2	0,4	0,6	0,8	р
$F_{0,CR}$ [kN]	41,503	37,293	32,301	25,992	
σ_{CR} [MPa]	230,6	207,2	179,5	144,4	0.1
т	8	7	7	6	0,1
n	1	2	2	3	
$F_{0,CR}$ [kN]	42,044	38,784	34,537	30,077	
σ_{CR} [MPa]	233,6	215,5	191,9	167,1	0.2
т	8	7	7	6	0,2
п	1	2	2	3	
$F_{0,CR}$ [kN]	42,887	40,647	38,021	34,936	
σ_{CR} [MPa]	238,3	225,8	211,2	194,1	0.3
т	8	8	7	7	0,5
п	1	1	2	2	
$F_{0,CR}$ [kN]	43,949	42,772	41,594	40,417	
σ_{CR} [MPa]	244,2	237,6	231,1	224,5	0.4
т	8	8	8	8	0,4
п	1	1	1	1	

· · · ·	· ·				
c_1 / c_0	0,2	0,4	0,6	0,8	р
$F_{0,CR}$ [kN]	42,296	39,128	34,998	30,348	
σ_{CR} [MPa]	235,0	217,4	194,4	168,6	0.1
т	8	7	7	6	0,1
n	1	2	3	4	
$F_{0,CR}$ [kN]	42,874	40,621	38,135	35,207	
σ_{CR} [MPa]	238,2	225,7	211,9	195,6	0.2
т	8	8	7	7	0,2
п	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	43,628	42,130	40,632	39,133	
σ_{CR} [MPa]	242,4	234,1	225,7	217,4	0.2
т	8	8	8	7	0,5
п	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,398	43,669	42,941	42,212	
σ_{CR} [MPa]	246,7	242,6	238,6	234,5	0.4
m	8	8	8	8	0,4
n	1	1	1	1	

Tabela 20. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 3)

Tabela 21. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 5)

c_1 / c_0	0,2	0,4	0,6	0,8	р
$F_{0,CR}$ [kN]	42,721	40,118	36,579	32,853	
σ_{CR} [MPa]	237,3	222,9	203,2	182,5	0.1
т	8	8	7	7	0,1
n	1	2	3	3	
$F_{0,CR}$ [kN]	43,267	41,407	39,547	37,249	
σ_{CR} [MPa]	240,4	230	219,7	206,9	0.2
т	8	8	8	7	0,2
n	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	43,954	42,781	41,608	40,436	
σ_{CR} [MPa]	244,2	237,7	231,2	224,6	0.2
т	8	8	8	8	0,5
п	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,591	44,055	43,519	42,984	
σ_{CR} [MPa]	247,7	244,8	241,8	238,8	0.4
m	8	8	8	8	0,4
n	1	1	1	1	

Tabela 22. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 10)

c_1 / c_0	0,2	0,4	0,6	0,8	р
$F_{0,CR}$ [kN]	43,277	41,280	38,887	35,931	
σ_{CR} [MPa]	240,4	229,3	216,0	199,6	0.1
т	8	8	7	7	0,1
n	1	2	3	3	
$F_{0,CR}$ [kN]	43,737	42,348	40,959	39,569	
σ_{CR} [MPa]	243,0	235,3	227,6	219,8	0.2
т	8	8	8	8	0,2
п	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,306	43,486	42,666	41,845	
σ_{CR} [MPa]	246,1	241,6	237,0	232,5	0.2
т	8	8	8	8	0,5
п	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,766	44,407	44,047	43,687	
σ_{CR} [MPa]	248,7	246,7	244,7	242,7	0.4
т	8	8	8	8	0,4
n	1	1	1	1	

C -	-)				
c_1 / c_0	0,2	0,4	0,6	0,8	р
$F_{0,CR}$ [kN]	43,567	41,916	40,092	37,731	
σ_{CR} [MPa]	242,0	232,9	222,7	209,6	0.1
т	8	8	8	7	0,1
n	1	2	2	3	
$F_{0,CR}$ [kN]	43,969	42,811	41,653	40,495	
σ_{CR} [MPa]	244,3	237,8	231,4	225,0	0.2
т	8	8	8	8	0,2
п	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,465	43,804	43,143	42,482	
σ_{CR} [MPa]	247,0	243,4	239,7	236,0	0.2
т	8	8	8	8	0,5
п	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,876	44,626	44,376	44,126	
σ_{CR} [MPa]	249,3	247,9	246,5	245,1	0.4
m	8	8	8	8	0,4
n	1	1	1	1	

Tabela 23. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 15)

Tabela 24. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 20)

c_1 / c_0	0,2	0,4	0,6	0,8	р
$F_{0,CR}$ [kN]	43,753	42,328	40,710	38,989	
σ _{CR} [MPa]	243,1	235,2	226,2	216,6	0.1
т	8	8	8	7	0,1
п	1	2	2	3	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,111	43,095	42,079	41,063	
σ_{CR} [MPa]	245,1	239,4	233,8	228,1	0.2
т	8	8	8	8	0,2
п	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,559	43,991	43,424	42,856	
σ _{CR} [MPa]	247,6	244,4	241,2	238,1	0.2
т	8	8	8	8	0,5
п	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,918	44,710	44,502	44,293	
σ_{CR} [MPa]	249,5	248,4	247,2	246,1	0.4
m	8	8	8	8	0,4
n	1	1	1	1	

Tabela 25. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 30)

c_1/c_0	0,2	0,4	0,6	0,8	р
$F_{0,CR}$ [kN]	43,986	42,845	41,488	40,130	
σ_{CR} [MPa]	244,4	238,0	230,5	222,9	0.1
т	8	8	8	8	0,1
п	1	1	2	2	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,274	43,421	42,568	41,715	
σ_{CR} [MPa]	246,0	241,2	236,5	231,8	0.2
т	8	8	8	8	0,2
п	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,668	44,210	43,752	43,294	
σ_{CR} [MPa]	248,2	245,6	243,1	240,5	0.3
т	8	8	8	8	0,5
п	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,975	44,824	44,673	44,521	
σ_{CR} [MPa]	249,9	249,0	248,2	247,3	0.4
m	8	8	8	8	0,4
n	1	1	1	1	

C -	- /				
c_1 / c_0	0,2	0,4	0,6	0,8	р
$F_{0,CR}$ [kN]	44,133	43,140	41,984	40,791	
σ_{CR} [MPa]	245,2	240,0	233,2	226,6	0.1
т	8	8	8	8	0,1
п	1	1	2	2	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,361	43,596	42,830	42,065	
σ_{CR} [MPa]	246,5	242,2	237,9	233,7	0.2
т	8	8	8	8	0,2
n	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,729	44,332	43,935	43,538	
σ_{CR} [MPa]	248,5	246,3	244,1	241,9	0.2
т	8	8	8	8	0,5
n	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	45,008	44,890	44,771	44,653	
σ_{CR} [MPa]	250,0	249,4	248,7	248,1	0.4
m	8	8	8	8	0,4
n	1	1	1	1	

Tabela 26. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 40)

Tabela 27. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 50)

c_1 / c_0	0,2	0,4	0,6	0,8	р
$F_{0,CR}$ [kN]	44,239	43,352	42,345	41,272	
σ_{CR} [MPa]	245,8	240,8	235,3	229,3	0.1
т	8	8	8	8	0,1
n	1	1	2	2	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,415	43,703	42,991	42,280	
σ_{CR} [MPa]	246,8	242,8	238,8	234,9	0.2
т	8	8	8	8	0,2
n	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	44,766	44,407	44,047	43,687	
σ_{CR} [MPa]	248,7	246,7	244,7	242,7	0.2
т	8	8	8	8	0,5
п	1	1	1	1	
$F_{0,CR}$ [kN]	45,030	44,933	44,837	44,740	
σ_{CR} [MPa]	250,2	249,6	249,1	248,6	0.4
m	8	8	8	8	0,4
n	1	1	1	1]

Wyniki zestawione w tabelach przedstawiono w formie graficznej na wykresach 10–18. Wartości obciążeń krytycznych są zależne od wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru k. Największe wartości $F_{0,CR}$ uzyskano dla największych wartości parametru k oraz dla najmniejszej wartości stosunku c_1/c_0 .



Rys. 10. Wpływ wartości parametru k i p oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych (k = 1)



Rys. 11. Wpływ wartości parametru k i p oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych (k = 3)



Rys. 12. Wpływ wartości parametru k i p oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych (k = 5)



Rys. 13. Wpływ wartości parametru k i p oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych (k = 10)



Rys. 14. Wpływ wartości parametru k i p oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych (k = 15)



Rys. 15. Wpływ wartości parametru k i p oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych (k = 20)



Rys. 16. Wpływ wartości parametru k i p oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych (k = 30)



Rys. 17. Wpływ wartości parametru k i p oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych (k =40)



Rys. 18. Wpływ wartości parametru k i p oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych (k = 50)

Na wartość obciążeń krytycznych wpływa również parametr przesunięcia *p*. Wraz ze zwiększaniem się wartości parametru *p* zwiększa się wartość $F_{0,CR}$. Największa wartość wyniosła $F_{0,CR} = 45,030 \ kN$ i otrzymano ją dla $k = 50, c_1/c_0 = 0,2$ oraz p = 0,4.

3.2. Belki trójwarstwowe na podłożu sprężystym

Badania dotyczą belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym, obciążonej siłą ściskającą przyłożoną w płaszczyźnie osiowej (rys. 19). W modelu analitycznym zastosowano klasyczną hipotezę linii łamanej (rys. 20).



Rys. 20. Klasyczna hipoteza linii łamanej

Przemieszczenie wzdłużne każdej warstwy belki po odkształceniu, odkształcenia oraz kąt odkształcenia postaciowego zdefiniowano następująco:

a) okładzina górna:
$$-(t_f + \frac{1}{2}t_c) \le y \le -\frac{1}{2}t_c$$

 $u(x, y, t) = -y \frac{\partial v}{\partial x} - u_f(x, t), \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\left(y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u_f}{\partial x}\right), \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$ (19)
b) rdzeń: $-\frac{1}{2}t_c \le y \le \frac{1}{2}t_c$
 $u(x, y, t) = -y \frac{\partial v}{\partial x} + 2y \frac{u_f(x,t)}{t_c} = -y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{u_f(x,t)}{t_c}\right), \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2}{t_c} \cdot \frac{\partial u_f}{\partial x}\right),$
 $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \frac{u_f(x,t)}{t_c},$ (20)
c) okładzina dolna: $\frac{1}{2}t_c \le y \le t_f + \frac{1}{2}t_c$

 $u(x, y, t) = -y \frac{\partial v}{\partial x} + u_f(x, t), \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\left(y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial u_f}{\partial x}\right), \quad \gamma_{xy} = 0.$ (21)

Energię odkształcenia sprężystego górnej okładziny można zapisać następująco:

$$U_{\varepsilon}^{(u-f)} = \frac{1}{2} E_f b \int_0^L \left[\frac{1}{12} t_f \left(4t_f^2 + 6t_f t_c + 3t_c^2 \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 - t_f \left(t_f + t_c \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u_f}{\partial x} + t_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} \right)^2 \right] dx.$$
(22)

Energia odkształcenia sprężystego rdzenia:

$$U_{\varepsilon}^{(c)} = \frac{1}{2} E_c b \int_0^L \left\{ \frac{1}{12} t_c^3 \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{4}{t_c} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{4}{t_c^2} \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{2t_c}{1 + v_c} \cdot \frac{u_f^2(x,t)}{t_c^2} \right\} dx.$$
(23)

Energia odkształcenia sprężystego dolnej okładziny:

$$U_{\varepsilon}^{(l-f)} = \frac{1}{2} E_f b \int_0^L \left\{ \frac{1}{12} t_f \left(4t_f^2 + 6t_f t_c + 3t_c^2 \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 - t_f \left(t_f + t_c \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u_f}{\partial x} + t_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} \right)^2 \right\} dx.$$
(24)

Całkowita energia odkształcenia sprężystego okładzin może być wyrażona wzorem:

$$U_{\varepsilon}^{(u-f)} = U_{\varepsilon}^{(l-f)} = U_{\varepsilon}^{(f)}, \tag{25}$$

gdzie

$$\delta U_{\varepsilon}^{(f)} = 2E_{f}bt_{f} \int_{0}^{L} \left\{ \frac{1}{12} \left(4t_{f}^{2} + 6t_{f}t_{c} + 3t_{c}^{2} \right) \cdot \frac{\partial^{4}v}{\partial x^{4}} \cdot (\delta v) - \frac{1}{2} \left(t_{f} + t_{c} \right) \right. \\ \left. \left. \left[\frac{\partial^{3}u_{f}}{\partial x^{3}} \cdot (\delta v) - \frac{\partial^{3}v}{\partial x^{3}} \cdot (\delta u_{f}) \right] - \frac{\partial^{2}u_{f}}{\partial x^{2}} \cdot (\delta u_{f}) \right\} dx,$$

$$\delta U_{\varepsilon}^{(c)} = E_{c}bt_{c} \int_{0}^{L} \left\{ \frac{1}{12}t_{c}^{2} \left[\frac{\partial^{4}v}{\partial x^{4}} \cdot (\delta v) - \frac{2}{t_{c}} \left[\frac{\partial^{3}u_{f}}{\partial x^{3}} (\delta v) - \frac{\partial^{3}v}{\partial x^{3}} (\delta u_{f}) \right] - \frac{4}{t_{c}^{2}} \cdot \frac{\partial^{2}u_{f}}{\partial x^{2}} \left(\delta u_{f} \right) \right] + \frac{2}{1 + v_{c}} \\ \left. \cdot \frac{u_{f}}{t_{c}^{2}} \left(\delta u_{f} \right) \right\} dx.$$

$$(26)$$

Energię kinetyczną można zapisać następująco:

$$T = \frac{1}{2}b\int_0^L \left(2t_f g_f + t_c g_c\right) \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{1}{2}b\left(2t_f g_f + t_c g_c\right)\int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx,\tag{28}$$

co ostatecznie daje

$$\delta T = -b \left(2t_f g_f + t_c g_c \right) \int_0^L \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} (\delta v) dx.$$
⁽²⁹⁾

Pracę obciążenia można zapisać w następującej postaci:

$$W = \int_0^L \left\{ -\frac{1}{2} q_f(x) \cdot v(x) + \frac{1}{2} F_0 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right\} dx, \quad q_f = c(x) \cdot v(x), \tag{30}$$

co ostatecznie można zapisać w postaci:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ -c(x) \cdot v^2(x) + F_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \right\} dx, \quad \delta W = \int_0^L \left\{ -c(x) \cdot v(x) \cdot (\delta v) - F_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (\delta v) \right\} dx. \tag{31}$$

 δv można zapisać:

$$\frac{1}{6}E_{f}bt_{f}\left(4t_{f}^{2}+6t_{f}t_{c}+3t_{c}^{2}\right)\cdot\frac{\partial^{4}v}{\partial x^{4}}-E_{f}bt_{f}\left(t_{f}+t_{c}\right)\cdot\frac{\partial^{3}u_{f}}{\partial x^{3}}+\frac{1}{12}E_{c}bt_{c}^{3}\cdot\frac{\partial^{4}v}{\partial x^{4}}-\frac{1}{6}E_{c}bt_{c}^{2}\frac{\partial^{3}u_{f}}{\partial x^{3}}+\left[c(x)\cdot v(x)+F_{0}\frac{\partial^{2}v}{\partial x^{2}}\right]+b\left(2t_{f}g_{f}+t_{c}g_{c}\right)\cdot\frac{\partial^{2}v}{\partial t^{2}}=0,$$
(32)

co ostatecznie daje

$$m_b \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c_{vv} \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - c_{vu} \cdot \frac{\partial^3 u_f}{\partial x^3} + F_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c(x) \cdot v(x,t) = 0,$$
(33)

gdzie

$$\begin{split} m_b &= bt_c g_c (1 + 2\chi_f \cdot v_{0f}), \quad \chi_f = \frac{t_f}{t_c}, \quad v_{0f} = \frac{g_f}{g_c}, \\ m_b &= \tilde{m}_b \cdot bt_c g_c, \quad \tilde{m}_b = 1 + 2\chi_f \cdot v_{0f}, \quad e_f = \frac{E_f}{E_c}, \\ c_{vv} &= \frac{1}{12} E_c bt_c^3 [1 + 2e_f (3 + 6\chi_f + 4\chi_f^2)\chi_f], \quad c_{vv} = \frac{1}{12} E_c bt_c^3 \cdot \tilde{c}_{vv}, \quad \tilde{c}_{vv} = [1 + 2e_f (3 + 6\chi_f + 4\chi_f^2)\chi_f], \\ c_{vu} &= \frac{1}{6} E_c bt_c^2 [1 + 6e_f (1 + \chi_f)\chi_f], \quad c_{vu} = \frac{1}{6} E_c bt_c^2 \cdot \tilde{c}_{vu}, \quad \tilde{c}_{vu} = [1 + 6e_f (1 + \chi_f)\chi_f]. \end{split}$$

Funkcję kształtu dla zmiennych właściwości belki (podłoża sprężystego) zapisano:

$$c(x) = c_0 - c_1 \sin^k(\pi\xi),$$
 (3)

gdzie $\xi = \frac{x}{L}, \quad 0 \le \xi \le 1.$

Równanie (3) można również zapisać za pomocą funkcji bezwymiarowej:

$$c(x) = c_0 [1 - \tilde{c}_1 \cdot \sin^k(\pi\xi)],$$
(34)

gdzie $\tilde{c}_1 = \frac{c_1}{c_0}$.

Po przekształceniu, równanie (33) można zapisać następująco:

$$bt_c g_c \cdot \widetilde{m}_b \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1}{12} E_c bt_c^3 \cdot \widetilde{c}_{vv} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{1}{6} E_c bt_c^2 \cdot \widetilde{c}_{vu} \frac{\partial^3 u_f}{\partial x^3} + F_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_0 [1 - \widetilde{c}_1 \cdot \sin^k(\pi\xi)] \cdot v(x,t) = 0.$$
(35)

Dalsza analiza dotyczy zagadnień statycznych dlatego równanie (35) można przedstawić w skróconej formie:

$$\frac{1}{12} E_c b t_c^3 \cdot \tilde{c}_{vv} \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{1}{6} E_c b t_c^2 \cdot \tilde{c}_{vu} \frac{d^3 u_f}{dx^3} + F_0 \frac{d^2 v}{dx^2} + c_0 [1 - \tilde{c}_1 \cdot \sin^k(\pi\xi)] \cdot v(x) = 0,$$
(36)

którą można przekształcić do następującego równania

$$\tilde{c}_{vv}\frac{d^4v}{dx^4} - 2\tilde{c}_{vu}\frac{1}{t_c}\frac{d^3u_f}{dx^3} + 12\frac{F_0}{E_c bt_c^3}\frac{d^2v}{dx^2} + 12\frac{c_0}{E_c bt_c^3}\left[1 - \tilde{c}_1 \cdot \sin^k(\pi\xi)\right] \cdot v(x) = 0.$$
(37)

Równanie (37) stanowi pierwsze równanie równowagi. Drugie równanie jest postaci

$$\frac{1}{6}E_{c}bt_{c}^{2}\cdot\tilde{c}_{vu}\frac{d^{3}v}{dx^{3}}-\frac{1}{3}E_{c}bt_{c}\cdot\tilde{c}_{uu}\frac{d^{2}u_{f}}{dx^{2}}+2\frac{E_{c}}{1+v_{c}}\frac{b}{t_{c}}\cdot u_{f}(x)=0,$$
(38)

które można przekształcić o następującego równania

$$\tilde{c}_{vu} \frac{d^3 v}{dx^3} - 2\tilde{c}_{uu} \frac{1}{t_c} \frac{d^2 u_f}{dx^2} + \frac{12}{1 + v_c} \cdot \frac{u_f(x)}{t_c^3} = 0,$$
(39)

gdzie

$$\tilde{c}_{uu} = 1 + 6e_f \chi_{f.}$$

Równania (37) i (39) stanowią układ równań równowagi. Zapisując je jako funkcje bezwymiarowe (bezwymiarowa współrzędna ξ) otrzymujemy:

$$\tilde{c}_{vv}\frac{d^4v}{d\xi^4} - 2\tilde{c}_{vu} \cdot \lambda \,\frac{d^3u_f}{d\xi^3} + 12\,\frac{F_0\lambda^2}{E_cbt_c} \cdot \frac{d^2v}{d\xi^2} + 12\,\frac{c_0}{E_c}\,\frac{t_c}{b}\,\lambda^4 \cdot [1 - \tilde{c}_1 \cdot \sin^k(\pi\xi)] \cdot v(\xi) = 0 \tag{40}$$

oraz

$$\tilde{c}_{vu} \frac{d^3 v}{d\xi^3} - 2\tilde{c}_{uu} \cdot \lambda \frac{d^2 u_f}{d\xi^2} + \frac{12}{1 + v_c} \lambda^3 \cdot u_f(\xi) = 0,$$
(41)

gdzie

$$\begin{aligned} x &= \xi \cdot L, \quad \lambda = \frac{L}{t_c}, \quad v(\xi) = v_a \cdot \sin(m\pi\xi) \cdot \sin^n(\pi\xi), \quad u_f(\xi) = c_3 \sinh(\alpha\xi) + c_4 \cosh(\alpha\xi) + u_{f0}(\xi), \\ \alpha &= \sqrt{\frac{6}{1 + v_c}} \frac{\lambda^2}{\tilde{c}_{uu}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \text{ i } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Równanie $u_f(\xi)$ można przedstawić w przybliżonej postaci:

$$u_f(\xi) = u_{fa} \cdot \cos(m\pi\xi) \cdot \cos^n(\pi\xi),$$

gdzie $u_{fa} = c \cdot v_a$.

Równanie (41) można przekształcić do następującej formy:

$$\frac{d^2 u_f}{d\xi^2} - \frac{6}{1 + v_c} \cdot \frac{\lambda^2}{\tilde{c}_{uu}} \cdot u_f(\xi) = \frac{\tilde{c}_{vu}}{2\tilde{c}_{uu} \cdot \lambda} \cdot \frac{d^3 v}{d\xi^3}.$$

Stosując metodę Galerkina, zapisano warunki dla równań (40) i (41):

$$\int_{0}^{1} \{r \circ wnanie \ (40)\} \sin \ (m\pi\xi) \cdot sin^{n}(\pi\xi)d\xi = 0.$$

$$\int_{0}^{1} \{r \circ wnanie \ (41)\} \cos \ (m\pi\xi) \cdot sin^{n}(\pi\xi)d\xi = 0.$$
(42)
(43)

Po wykonaniu całkowania (równanie 42), otrzymano równanie algebraiczne:

$$\tilde{c}_{vv} \cdot J_1 - 2\tilde{c}_{vu} \cdot \alpha_u \cdot \lambda \cdot J_2 - 12 \frac{F_0 \lambda^2}{E_c b t_c} \cdot J_3 + 12 \frac{c_0}{E_c} \frac{t_c}{b} \lambda^4 [J_4 - \tilde{c}_1 \cdot J_5] = 0,$$
(44)

z którego wyznaczono obciążenie

$$12\frac{\lambda^{2}}{E_{c}bt_{c}} \cdot J_{3} \cdot F_{0} = \tilde{c}_{vv} \cdot J_{1} - 2\alpha_{u} \cdot \tilde{c}_{vu} \cdot \lambda \cdot J_{2} + 12\frac{c_{0}}{E_{c}}\frac{t_{c}}{b}\lambda^{4}(J_{4} - \tilde{c}_{1} \cdot J_{5}),$$

$$F_{0} = \frac{1}{12} \Big[\tilde{c}_{vv} \cdot J_{1} - 2\alpha_{u} \cdot \tilde{c}_{vu} \cdot \lambda \cdot J_{2} + 12\frac{c_{0}}{E_{c}}\frac{t_{c}}{b}(J_{4} - \tilde{c}_{1} \cdot J_{5})\lambda^{4} \Big] \frac{1}{J_{3} \cdot \lambda^{2}} \cdot E_{c}bt_{c},$$
(45)

co po przekształceniu daje

$$F_0 = \tilde{F}_0 \cdot E_c b t_c, \tag{46}$$

gdzie

$$\tilde{F}_{0} = \frac{1}{12} \left[\tilde{c}_{vv} \cdot J_{1} - 2\alpha_{u} \cdot \tilde{c}_{vu} \cdot \lambda \cdot J_{2} + 12 \frac{c_{0}}{E_{c}} \frac{t_{c}}{b} \left(J_{4} - \tilde{c}_{1} \cdot J_{5} \right) \lambda^{4} \right] \frac{1}{J_{3} \cdot \lambda^{2}},$$
(47)

$$J_1 = \int_0^1 \tilde{v}^{IV}(\xi) \cdot \tilde{v}(\xi) d\xi, \qquad (48)$$

$$J_2 = \int_0^1 \tilde{u}^{III}(\xi) \cdot \tilde{v}(\xi) d\xi, \tag{49}$$

$$J_3 = -\int_0^1 \tilde{v}^{II}(\xi) \cdot v(\xi) d\xi, \tag{50}$$

$$J_4 = \int \tilde{v}^2(\xi) d\xi, \tag{51}$$

$$J_5 = \int \tilde{v}^2(\xi) \cdot \sin^k(\pi\xi) d\xi.$$
(52)

Obciążenie krytyczne $F_{0,CR}$ jest funkcją parametrów geometrycznych i mechanicznych belki trójwarstwowej oraz liczb m i n, zatem:

$$F_{0,CR} = \min_{m,n} \frac{1}{12} \left\{ \tilde{c}_{vv} - \frac{(m\pi)^2 \cdot \tilde{c}_{vu}^2}{(m\pi)^2 \cdot \tilde{c}_{uu} + \frac{6}{1 + v_c} \cdot \lambda^2} + 12 \alpha_c \frac{t_c}{b} \left(\frac{\lambda}{m\pi}\right)^4 \right\} \left(\frac{m\pi}{\lambda}\right)^2 E_c bt_c, \tag{53}$$

co w wersji skróconej można zapisać

$$F_{0,CR} = \min_{m,n} \widetilde{F}_{0,CR} \cdot E_c b t_c, \tag{54}$$

gdzie

$$\tilde{F}_{0,CR} = \frac{1}{12} \left\{ \tilde{c}_{vv} - \frac{(m\pi)^2 \cdot \tilde{c}_{vu}^2}{(m\pi)^2 \cdot \tilde{c}_{uu} + \frac{6}{1 + v_c} \cdot \lambda^2} + 12 \alpha_c \frac{t_c}{b} \left(\frac{\lambda}{m\pi}\right)^4 \right\} \left(\frac{m\pi}{\lambda}\right)^2,$$
$$\alpha_c = \frac{c_0}{E_c}.$$

Dokonano obliczeń wartości obciążeń krytycznych i naprężeń dla zmiennych wartości parametrów *m* i *n*, zmiennych wartości grubości rdzenia i okładzin oraz dla następujących danych liczbowych: $c_0 = 10 MPa$, $E_f = 200\ 000\ MPa$, $E_c = 3150\ MPa$, $L = 1200\ mm$, $b = 40\ mm$, $v_c = 0,05$ oraz $G_c = \frac{E_c}{2(1+v_c)}$. Wyniki uzyskane dla różnych wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru *k* zestawiono w tabelach 28–63.

1. Wariant: $t_c = 18 \text{ mm}, t_f = 1 \text{ mm}$

Tabela 28. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 1)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	237,752	227,137	216,521	205,906	195,291	184,675	174,060	163,445
σ_{CR} [MPa]	297,2	283,9	270,7	257,4	244,1	230,8	217,6	204,3
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 29. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 3)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	241,553	234,738	227,923	221,108	214,294	207,479	200,664	193,849
σ_{CR} [MPa]	301,9	293,4	284,9	276,4	267,9	259,3	250,8	242,3
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

1 ())	2		```					
$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	242,744	237,121	231,497	225,874	220,251	214,627	209,004	203,380
σ_{CR} [MPa]	303,4	296,4	289,4	282,3	275,3	268,3	261,3	254,2
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 30. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 5)

Tabela 31. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 10)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	243,666	238,964	234,262	229,560	224,858	220,156	215,454	210,752
σ_{CR} [MPa]	304,6	298,7	292,8	287,0	281,1	275,2	269,3	263,4
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 32. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 15)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	244,044	239,721	235,398	231,074	226,751	222,428	218,105	213,781
σ_{CR} [MPa]	305,1	299,7	294,2	288,8	283,4	278,0	272,6	267,2
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 33. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 20)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	244,313	240,258	236,203	232,148	228,093	224,038	219,983	215,928
σ_{CR} [MPa]	305,4	300,3	295,3	290,2	285,1	280,0	275,0	269,9
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 34. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 30)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	244,720	241,072	237,424	233,776	230,128	226,480	222,833	219,185
σ_{CR} [MPa]	305,9	301,3	296,8	292,2	287,7	283,1	278,5	274,0
m	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 35. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 40)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	245,027	241,686	238,345	235,005	231,664	228,323	224,983	221,642
σ_{CR} [MPa]	306,3	302,1	297,9	293,8	289,6	285,4	281,2	277,1
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	245,270	242,172	239,074	235,976	232,878	229,779	226,681	223,583
σ_{CR} [MPa]	306,6	302,7	298,8	295,0	291,1	287,2	283,4	279,5
m	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 36. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 50)

2. Wariant: $t_c = 16 \text{ mm}, t_f = 2 \text{ mm}$

Tabela 37. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 1)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	295,450	284,834	274,219	263,604	252,988	242,373	231,758	221,142
σ_{CR} [MPa]	369,3	356,0	342,8	329,5	316,2	303,0	289,7	276,4
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 38. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 3)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	299,250	292,436	285,621	278,806	271,991	265,176	258,362	251,547
σ_{CR} [MPa]	374,1	365,5	357,0	348,5	340,0	331,5	323,0	314,4
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 39. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 5)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	300,442	294,818	289,195	283,572	277,948	272,325	266,701	261,078
σ_{CR} [MPa]	375,6	368,5	361,5	354,5	347,4	340,4	333,4	326,3
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 40. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 10)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	301,363	296,661	291,959	287,257	282,556	277,854	273,152	268,450
σ_{CR} [MPa]	376,7	370,8	364,9	359,1	353,2	347,3	341,4	335,6
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 41. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 15)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	301,742	297,419	293,095	288,772	284,449	280,125	275,802	271,479
σ_{CR} [MPa]	377,2	371,8	366,4	361,0	355,6	350,2	344,8	339,3
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

1 ())			. ,					
$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	302,010	297,955	293,901	289,846	285,791	281,736	277,681	273,626
σ_{CR} [MPa]	377,5	372,4	367,4	362,3	357,2	352,2	347,1	342,0
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 42. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 20)

Tabela 43. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 30)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	302,417	298,770	295,122	291,474	287,826	284,178	280,530	276,882
σ_{CR} [MPa]	378,0	373,5	368,9	364,3	359,8	355,2	350,7	346,1
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 44. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 40)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	302,725	299,384	296,043	292,702	289,362	286,021	282,680	279,339
σ_{CR} [MPa]	378,4	374,2	370,1	365,9	361,7	357,5	353,4	349,2
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 45. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 50)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	302,967	299,869	296,771	293,673	290,575	287,477	284,379	281,281
σ_{CR} [MPa]	378,7	374,8	371,0	367,1	363,2	359,3	355,5	351,6
m	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

3. Wariant: $t_c = 14 \text{ mm}, t_f = 3 \text{ mm}$

Tabela 46. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 1)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	337,332	326,717	316,102	305,486	294,871	284,256	273,640	263,025
σ_{CR} [MPa]	421,7	408,4	395,1	381,9	368,6	355,3	342,1	328,8
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 47. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 3)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	341,133	334,318	327,503	320,689	313,874	307,059	300,244	293,429
σ_{CR} [MPa]	426,4	417,9	409,4	400,9	392,3	383,8	375,3	366,8
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

1 ())			· ,					
$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	342,324	336,701	331,078	325,454	319,831	314,207	308,584	302,961
σ_{CR} [MPa]	427,9	420,9	413,8	406,8	399,8	392,8	385,7	378,7
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 48. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 5)

Tabela 49. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 10)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	343,246	338,544	333,842	329,140	324,438	319,736	315,034	310,332
σ_{CR} [MPa]	429,1	423,2	417,3	411,4	405,5	399,7	393,8	387,9
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 50. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 15)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	343,624	339,301	334,978	330,655	326,331	322,008	317,685	313,361
σ_{CR} [MPa]	429,5	424,1	418,7	413,3	407,9	402,5	397,1	391,7
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 51. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 20)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	343,893	339,838	335,783	331,728	327,673	323,618	319,564	315,509
σ_{CR} [MPa]	429,9	424,8	419,7	414,7	409,6	404,5	399,5	394,4
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 52. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 30)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	344,300	340,652	337,004	333,356	329,709	326,061	322,413	318,765
σ_{CR} [MPa]	430,4	425,8	421,3	416,7	412,1	407,6	403,0	398,5
m	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 53. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 40)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	344,607	341,266	337,926	334,585	331,244	327,903	324,563	321,222
σ_{CR} [MPa]	430,8	426,6	422,4	418,2	414,1	409,9	405,7	401,5
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	344,850	341,752	338,654	335,556	332,458	329,360	326,262	323,164
σ_{CR} [MPa]	431,1	427,2	423,3	419,4	415,6	411,7	407,8	404,0
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 54. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 50)

4. Wariant: $t_c = 12 \text{ mm}, t_f = 4 \text{ mm}$

Tabela 55. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 1)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	368,453	357,837	347,222	336,607	325,991	315,376	304,761	294,145
σ_{CR} [MPa]	460,6	447,3	434,0	420,8	407,5	394,2	381,0	367,7
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 56. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 3)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	372,253	365,439	358,624	351,809	344,994	338,179	331,365	324,550
σ_{CR} [MPa]	465,3	456,8	448,3	439,8	431,2	422,7	414,2	405,7
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 57. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 5)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	373,445	367,821	361,198	356,575	350,951	345,328	339,704	334,081
σ_{CR} [MPa]	466,8	459,8	451,5	445,7	438,7	431,7	424,6	417,6
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 58. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 10)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	374,366	369,664	364,962	360,260	355,559	350,857	346,155	341,453
σ_{CR} [MPa]	468,0	462,1	456,2	450,3	444,4	438,6	432,7	426,8
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 59. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 15)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	374,745	370,422	366,098	361,775	357,452	353,128	348,805	344,482
σ_{CR} [MPa]	468,4	463,0	457,6	452,2	446,8	441,4	436,0	430,6
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

1 ())	2		` '					
$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	375,013	370,958	366,984	362,849	358,794	354,739	350,684	346,629
σ_{CR} [MPa]	468,8	463,7	458,7	453,6	448,5	443,4	438,4	433,3
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 60. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 20)

Tabela 61. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 30)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	375,420	371,773	368,125	364,477	360,829	357,181	353,533	349,885
σ_{CR} [MPa]	469,3	464,7	460,2	455,6	451,0	446,5	441,9	437,4
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 62. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 40)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	375,727	372,387	369,046	365,705	362,365	359,024	355,683	352,342
σ_{CR} [MPa]	469,7	465,5	461,3	457,1	453,0	448,8	444,6	440,4
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 63. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 50)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	375,970	372,872	369,774	366,676	363,578	360,480	357,382	354,284
σ_{CR} [MPa]	470,0	466,1	462,2	458,3	454,5	450,6	446,7	442,9
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Wyniki zestawione w tabelach przedstawiono w formie graficznej na wykresach 21–37. Wartości obciążeń krytycznych są zależne od wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru k. Największe wartości $F_{0,CR}$ uzyskano dla największych wartości parametru k oraz dla najmniejszej wartości stosunku c_1/c_0 .



Rys. 21. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych (k=1)



Rys. 22. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych (k=3)



Rys. 23. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych (k=5)



Rys. 24. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych (k = 10)



Rys. 25. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych (k=15)



Rys. 26. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych (k=20)



Rys. 27. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych (k = 30)



Rys. 28. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych (k=40)



Rys. 29. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych (k=50)



Rys. 30. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 12 \text{ mm}$)



Rys. 31. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru k na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 12 \text{ mm}$)



Rys. 32. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 14 \text{ mm}$)



Rys. 33. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru k na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 14 \text{ mm}$)



Rys. 34. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 16$ mm)



Rys. 35. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru k na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 16 \text{ mm}$)



Rys. 36. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 18$ mm)



Rys. 37. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru k na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 18$ mm)

Wartości obciążeń krytycznych są zależne od wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru k. Największe wartości $F_{0,CR}$ uzyskano dla największych wartości parametru k oraz dla najmniejszej wartości stosunku c_1/c_0 . Największa wartość wyniosła $F_{0,CR} = 375,970 \, kN$ i otrzymano ją dla k = 50 oraz $c_1/c_0 = 0,1$. W przypadku belki trójwarstwowej, na wartości obciążenia krytycznego wpływa również grubość rdzenia. Wraz ze zmniejszaniem się grubości rdzenia, a tym samym zwiększaniem grubości okładzin, zwiększa się wartości obciążeń krytycznych. W analizowanym zakresie, największe obciążenia otrzymano dla belki o grubości rdzenia $t_c = 12 \, mm$.

W tabelach 64–99 przedstawiono obliczenia dla wymiernych wartości wykładnika potęgowego funkcji (3). Największe wartości $F_{0,CR}$ uzyskano, tak jak w poprzednim przypadku, dla największych wartości parametru k oraz dla najmniejszej wartości stosunku c_1/c_0 . Największe obciążenie wyniosło $F_{0,CR} = 366,259 \ kN$ i otrzymano je dla $k = \frac{1}{2}$ oraz $c_1/c_0 = 0,1$ ($t_c = 12 \ mm$). Wyniki zestawione w tabelach przedstawiono w formie graficznej na wykresach 38–54.

1. Wariant: $t_c = 18 \text{ mm}, t_f = 1 \text{ mm}$

Tabela 64. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k}=\frac{1}{2}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	235,558	222,749	209,940	197,130	184,321	171,512	158,703	145,893
σ_{CR} [MPa]	294,4	278,4	262,4	246,4	230,4	214,4	198,4	182,4
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 65. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{3}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	234,593	220,818	207,043	193,268	179,494	165,719	151,944	138,169
σ_{CR} [MPa]	293,2	276,0	258,8	241,6	224,4	207,1	189,9	172,7
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 66. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{4}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	234,053	219,738	205,424	191,109	176,794	162,480	148,165	133,850
σ_{CR} [MPa]	292,6	274,7	256,8	238,9	221,0	203,1	185,2	167,3
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 67. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{5}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	233,709	219,050	204,391	189,732	175,073	160,414	145,755	131,096
σ_{CR} [MPa]	292,1	273,8	255,5	237,2	218,8	200,5	182,2	163,9
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 68. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{6} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	233,470	218,572	203,675	188,777	173,879	158,982	144,084	129,186
σ_{CR} [MPa]	291,8	273,2	254,6	236,0	217,3	198,7	180,1	161,5
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

			· · · ·					
$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	233,295	218,222	203,149	188,077	173,004	157,931	142,858	127,786
σ_{CR} [MPa]	291,6	272,8	253,9	235,1	216,3	197,4	178,6	159,7
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 69. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{7} \right)$

Tabela 70. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{8}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	233,161	217,954	202,747	187,541	172,334	157,127	141,921	126,714
σ_{CR} [MPa]	291,5	272,4	253,4	234,4	215,4	196,4	177,4	158,4
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 71. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{9}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	233,055	217,743	202,430	187,118	171,805	156,493	141,180	125,868
σ_{CR} [MPa]	291,3	272,2	253,0	233,9	214,8	195,6	176,5	157,3
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 72. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{10} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	232,969	217,571	202,173	186,775	171,377	155,979	140,581	125,183
σ_{CR} [MPa]	291,2	272,0	252,7	233,5	214,2	195,0	175,7	156,5
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

2. Wariant: $t_c = 16 \text{ mm}, t_f = 2 \text{ mm}$

Tabela 73. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{2}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	293,256	280,447	267,637	254,828	242,019	229,210	216,400	203,591
σ_{CR} [MPa]	366,6	350,6	334,5	318,5	302,5	286,5	270,5	254,5
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	292,290	278,516	264,741	250,966	237,191	223,416	209,642	195,867
σ_{CR} [MPa]	365,4	348,1	330,9	313,7	296,5	279,3	262,1	244,8
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 74. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{3} \right)$

Tabela 75. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{4}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	291,751	277,436	263,121	248,807	234,492	220,177	205,863	191,548
σ_{CR} [MPa]	364,7	346,8	328,9	311,0	293,1	275,2	257,3	239,4
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 76. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{5}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	291,406	276,747	262,088	247,429	232,770	218,111	203,452	188,793
σ_{CR} [MPa]	364,3	345,9	327,6	309,3	291,0	272,6	254,3	236
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 77. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{6} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	291,168	276,270	261,372	246,475	231,577	216,679	201,782	186,884
σ_{CR} [MPa]	364,0	345,3	326,7	308,1	289,5	270,8	252,2	233,6
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 78. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{7} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	290,992	275,920	260,847	245,774	230,701	215,629	200,556	185,483
σ_{CR} [MPa]	363.7	344,9	326,1	307,2	288,4	269,5	250,7	231,9
m	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
---------------------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------
$F_{0,CR}$ [kN]	290,859	275,652	260,445	245,238	230,032	214,825	199,618	184,412
σ_{CR} [MPa]	363,6	344,6	325,6	306,5	287,5	268,5	249,5	230,5
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 79. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{8} \right)$

Tabela 80. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{9}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	290,753	275,440	260,128	244,815	229,503	214,190	198,878	183,566
σ_{CR} [MPa]	363,4	344,3	325,2	306,0	286,9	267,7	248,6	229,5
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 81. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{10} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	290,667	275,269	259,871	244,473	229,075	213,677	198,279	182,881
σ_{CR} [MPa]	363,3	344,1	324,8	305,6	286,3	267,1	247,8	228,6
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

3. Wariant: $t_c = 14 \text{ mm}, t_f = 3 \text{ mm}$

Tabela 82. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{2}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	335,139	322,329	309,520	296,711	283,901	271,092	258,283	245,474
σ_{CR} [MPa]	418,9	402,9	386,9	370,9	354,9	338,9	322,9	306,8
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 83. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{3}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	334,173	320,398	306,623	292,849	279,074	265,299	251,524	237,749
σ_{CR} [MPa]	417,7	400,5	383,3	366,1	348,8	331,6	314,4	297,2
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	333,633	319,319	305,004	290,689	276,375	262,060	247,745	233,431
σ_{CR} [MPa]	417,0	399,1	381,3	363,4	345,5	327,6	309,7	291,8
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 84. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{4} \right)$

Tabela 85. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{5}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	333,289	318,630	303,971	289,312	274,653	259,994	245,335	230,676
σ_{CR} [MPa]	416,6	398,3	380,0	361,6	343,3	325,0	306,7	288,3
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 86. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{6}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	333,050	318,152	303,255	288,357	273,460	258,562	243,664	228,767
σ_{CR} [MPa]	416,3	397,7	379,1	360,4	341,8	323,2	304,6	286
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 87. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{7}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	332,875	317,802	302,730	287,657	272,584	257,511	242,438	227,366
σ_{CR} [MPa]	416,1	397,3	378,4	359,6	340,7	321,9	303,0	284,2
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 88. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{8}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	332,741	317,534	302,328	287,121	271,914	256,708	241,501	226,294
σ_{CR} [MPa]	415,9	396,9	377,9	358,9	339,9	320,9	301,9	282,9
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	332,635	317,323	302,010	286,698	271,385	256,073	240,761	225,448
σ_{CR} [MPa]	415,8	396,7	377,5	358,4	339,2	320,1	301,0	281,8
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 89. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{9} \right)$

Tabela 90. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{10} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	332,550	317,152	301,754	286,355	270,957	255,559	240,161	224,763
σ_{CR} [MPa]	415,7	396,4	377,2	357,9	338,7	319,4	300,2	281,0
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

4. Wariant: $t_c = 12 \text{ mm}, t_f = 4 \text{ mm}$

Tabela 91. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{2}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	366,259	353,450	340,640	327,831	315,022	302,213	289,403	276,594
σ_{CR} [MPa]	457,8	441,8	425,8	409,8	393,8	377,8	361,8	345,7
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 92. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{3}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	365,293	351,519	337,744	323,969	310,194	296,419	282,645	268,870
σ_{CR} [MPa]	456,6	439,4	422,2	405,0	387,7	370,5	363,3	336,1
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 93. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{4}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	364,754	350,439	336,124	321,810	307,495	293,180	278,866	264,551
σ_{CR} [MPa]	455,9	438,0	420,2	402,3	384,4	366,5	348,6	330,7
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	364,409	349,750	335,091	320,432	305,773	291,114	276,455	261,796
σ_{CR} [MPa]	455,5	437,2	418,9	400,5	382,2	363,9	345,6	327,2
m	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 94. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{5} \right)$

Tabela 95. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{6}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	364,171	349,273	334,375	319,478	304,580	289,682	274,785	259,887
σ_{CR} [MPa]	455,2	436,6	418,0	399,3	380,7	362,1	343,5	324,9
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 96. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{7}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	363,995	348,923	333,850	318,777	303,704	288,632	273,559	258,486
σ_{CR} [MPa]	455,0	436,2	417,3	398,5	379,6	360,8	341,9	323,1
т	3	3	3	3	3	3	3	3
п	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 97. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{8} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	363,862	348,655	333,448	318,241	303,035	287,828	272,621	257,415
σ_{CR} [MPa]	454,8	435,8	416,8	397,8	378,8	358,8	340,8	321,8
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 98. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{9} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	363,756	348,443	333,131	317,818	302,506	287,193	271,881	256,569
σ_{CR} [MPa]	454,7	435,6	416,4	397,3	378,1	359,0	339,9	320,7
m	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

			(10/					
$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}$ [kN]	363,670	348,272	332,874	317,476	302,078	286,680	271,282	255,884
σ_{CR} [MPa]	454,6	435,3	416,1	396,8	377,6	358,4	339,1	319,9
т	3	3	3	3	3	3	3	3
n	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 99. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{10} \right)$



Rys. 38. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych $\left(k = \frac{1}{2}\right)$



Rys. 39. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych $\left(k = \frac{1}{3}\right)$



Rys. 40. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych $\left(k = \frac{1}{4}\right)$



Rys. 41. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych $\left(k = \frac{1}{5}\right)$



Rys. 42. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych $\left(k = \frac{1}{6}\right)$



Rys. 43. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych $\left(k = \frac{1}{7}\right)$



Rys. 44. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych $\left(k = \frac{1}{8}\right)$



Rys. 45. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych $\left(k = \frac{1}{9}\right)$



Rys. 46. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych $\left(k = \frac{1}{10}\right)$



Rys. 47. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 12 \text{ mm}$)



Rys. 48. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru k na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 12 \text{ mm}$)



Rys. 49. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 14 \text{ mm}$)



Rys. 50. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru k na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 14 \text{ mm}$)



Rys. 51. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 16 \text{ mm}$)



Rys. 52. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru k na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 16 \text{ mm}$)



Rys. 53. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 18 \text{ mm}$)



Rys. 54. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz parametru k na wartości obciążeń krytycznych ($t_c = 18 \text{ mm}$)

Celem powyższych badań analitycznych była stateczność belek jednorodnych i trójwarstwowych na podłożu sprężystym. Belki o szerokości *b*, grubości *t* ($t = t_c + 2t_f - w$ przypadku belki trójwarstwowej) i długości *L* połączone zostały z podłożem sprężystym o zmiennych właściwościach (symetryczna i niesymetryczna postać funkcji opisującej kształt podłoża). Belki zostały obciążone siłą ściskającą *F*₀, przyłożoną w płaszczyźnie osiowej. Utrata stateczności spowodowała przemieszczenie podłoża sprężystego. Na podstawie przeprowadzonych badań analitycznych można zauważyć zależność między wyboczeniem – pofałdowaniem belki a odkształceniem podłoża.

Głównym celem badań było znalezienie zależności pozwalających na wyznaczenie wartości obciążeń krytycznych $F_{0,CR}$. Na ich wartość miała wpływ funkcja opisująca kształt podłoża sprężystego, a przede wszystkim dwa reprezentujące ją parametry: k – parametr kształtu funkcji (wykładnik potęgowy) oraz c_1/c_0 – amplitudy funkcji. Wartość obciążeń krytycznych zmieniała się w zależności od przyjętych wartości k oraz c_1/c_0 . Największe wartości $F_{0,CR}$ uzyskano dla największych wartości parametru k oraz dla najmniejszej wartości stosunku c_1/c_0 . W przypadku belki jednorodnej o niesymetrycznych właściwościach podłoża sprężystego, na wartość obciążeń krytycznych wpływał również parametr przesunięcia p (niesymetryczny kształt funkcji opisującej podłoże). Wraz ze zwiększaniem się wartości parametru p zwiększała się wartość $F_{0,CR}$. Zestawienie największych wartości obciążeń dla wszystkich analizowanych przypadków przedstawia tabela poniżej.

Belka jednorodna o symetrycznych właściwościach podłoża sprężystego									
	parametr kształtu fur	ıkcji <i>k</i> – liczba naturalna							
$F_{0,CR} [kN]$	k	c_{1}/c_{0}	-						
44,675	50	0,1 –							
Belka	i jednorodna o symetrycznyc	h właściwościach podłoża sp	rężystego						
	parametr kształtu fun	kcji <i>k</i> – liczba wymierna							
$F_{0,CR} [kN]$	k	c_{1}/c_{0}	-						
43,072	0,1	Ι							
Belka j	ednorodna o niesymetryczny	ch właściwościach podłoża s	prężystego						
	parametr kształtu fur	ıkcji <i>k</i> – liczba naturalna							
$F_{0,CR} [kN]$	k	c_{1}/c_{0}	p						
45,030	50	0,2	0,4						
Belka t	rójwarstwowa o symetryczny	vch właściwościach podłoża s	prężystego						
	parametr kształtu fur	ıkcji <i>k</i> – liczba naturalna							
$F_{0,CR} [kN]$	k	c_{1}/c_{0}	$t_c \ [mm]$						
375,970	50	0,1	12						
Belka ti	rójwarstwowa o symetryczny	vch właściwościach podłoża s	prężystego						
	parametr kształtu fun	kcji <i>k</i> – liczba wymierna							
$F_{0,CR}$ [kN]	k	c_{1}/c_{0}	$t_c [mm]$						
366,259	$\frac{1}{2}$	0,1	12						

Tabela 100. Zestawienie wyników badań analitycznych dla belek jednorodnych i trójwarstwowych

Analiza belki trójwarstwowej wykazała, że na wartość obciążenia krytycznego wpływała również grubość rdzenia t_c . Wraz ze zmniejszaniem się grubości rdzenia, a tym samym zwiększaniem grubości okładzin, zwiększała się wartość obciążeń krytycznych. Badania skupiły się na czterech wartościach grubości rdzenia, mianowicie 12 mm, 14 mm, 16 mm oraz 18 mm. W analizowanym zakresie, największe obciążenia otrzymano dla belki o grubości rdzenia $t_c = 12 mm$ (okładzina górna oraz dolna miały takie same grubości).

Na podstawie powyższych badań można stwierdzić, że na wartość obciążeń krytycznych w belce trójwarstwowej wpływają właściwości podłoża sprężystego, a także właściwości geometryczne konstrukcji. Sztywność na zginanie belki trójwarstwowej jest większa od sztywności belki jednorodnej, a tym samym opór podłoża jest mniejszy. Belka jednorodna jest kształtowana zgodnie z właściwościami podłoża sprężystego.

Przedstawione modele belek jednorodnych i trójwarstwowych, o zmiennych właściwościach podłoża sprężystego stanowią uogólnienie modeli opisanych w literaturze. Zrealizowane w ramach niniejszej rozprawy doktorskiej badania wpływu właściwości podłoża oraz właściwości geometrycznych belek na obciążenia krytyczne przedstawiają zarówno ogólny zarys, jak i wnoszą praktyczne informacje do dyskusji dotyczącej stabilności konstrukcji na podłożu sprężystym.

4. Badania numeryczne4.1. Belki jednorodne na podłożu sprężystym

Modele belek jednorodnej i trójwarstwowej opracowano w systemie SolidWorks. Obie konstrukcje dyskretyzowano elementami bryłowymi. W przypadku belki jednorodnej, rozmiar elementu skończonego wynosił 2 mm (tolerancja 0,1 mm). Całkowita liczba węzłów była równa 301668, natomiast liczba elementów skończonych wynosiła 108881. Siła ściskająca została przyłożona w płaszczyźnie osiowej. Podłoże sprężyste zostało zastąpione układem 24 sprężystych podpór.

Badania MES przeprowadzono na rodzinie belek o takich samych parametrach jakie występowały w obliczeniach analitycznych. Badanie polegało na wyznaczeniu wartości obciążeń krytycznych oraz postaci wyboczenia. Schemat belki, sposoby podparcia i obciążenia, a także model siatki MES pokazano na rysunkach 55–62.



Rys. 56. Podparcie końców belki



Rys. 59. Obciążenie belki



Rys. 62. Siatka MES

W tabelach 101-109 zamieszczono porównanie wyników analitycznych i numerycznych dotyczących obciążeń krytycznych w belkach jednorodnych na podłożu sprężystym. Analiza dotyczyła funkcji kształtu, w której wartość wykładnika potęgowego *k* była liczbą naturalną. Taką samą analizę, ale dotyczącą wymiernych wartości parametru kształtu *k* zamieszczono w tabelach 110-118.

Wartość różnicy pomiędzy obliczeniami uzyskanymi metodami analityczną i numeryczną początkowo nie różniła się w sposób znaczący w analizowanym zakresie. Dla amplitudy funkcji c(x)równej 0,1, różnica wyniosła 1,93%, natomiast dla maksymalnej analizowanej wartości $c_1/c_0 = 0,8$ była ona równa 1,07% (k = 1). Wraz ze zwiększaniem się wartości parametru k, dochodziło do większych rozbieżności w wartościach obciążenia krytycznego obliczonego dwiema metodami. Różnica ta pojawiała się przy największych analizowanych wartościach amplitudy c_1/c_0 i wynikała z faktu uproszczeń w modelu MES. W rozwiązaniu analitycznym, model podłoża sprężystego został przedstawiony za pomocą równania (3). Równanie to jest modelem matematycznym badanego zjawiska. Na kształt podłoża sprężystego ma wpływ wartość amplitudy c_1/c_0 oraz parametru kształtu k. Im większa wartość tych dwóch parametrów, tym pik na wykresie funkcji (3) jest mniejszy i węższy, a co za tym idzie łatwo może on zostać pominięty w obliczeniach numerycznych. Jednym z rozwiązań tego problemu mogłoby być zagęszczenie siatki w miejscu występowania dużej niezgodności (pik wykresu). W niniejszej pracy nie skorzystano z tego rozwiązania z dwóch powodów. Po pierwsze, zageszczenie siatki spowodowałoby zwiększenie czasu obliczeń, co przy tak dużej liczbie wyników byłaby rzeczą uciążliwą. Po drugie, analiza wpływu zagęszczenia siatki, wielkości elementów skończonych, itp. będzie stanowiła odrębną pracę i kierunki dalszych badań autora rozprawy. Celem niniejszych obliczeń było pokazanie wpływu parametrów podłoża sprężystego na wartości obciążeń krytycznych belek, otrzymanych dla stałych parametrów (jednolite zagęszczenie siatki, wielkości elementów skończonych stałe w całej konstrukcji). Model numeryczny pełnił rolę sprawdzającą poprawność modelu analitycznego.

Analiza wyników dla wymiernych wartości parametru k pozwala stwierdzić większą zgodność pomiędzy obliczeniami analitycznymi i numerycznymi. Zarówno dla minimalnych, jak i maksymalnych wartości k i c_1/c_0 , różnica nie zmieniała się w sposób znaczący (mały rozstęp wyników). W całym zakresie badań, wartość różnicy nie przekraczała 3,2%, podczas gdy dla naturalnego wykładnika k największa różnica w wynikach wyniosła 9,5%.

Wyniki przedstawione w poniższych tabelach zaprezentowano w formie graficznej na wykresach 63–66. Linią ciągłą oznaczono wyniki badań analitycznych, natomiast linią przerywaną – badań numerycznych.

Na rysunkach 67–72 przedstawiono postacie wyboczenia belki jednorodnej dla amplitud c_1/c_0 równych 0,1, 0,5 i 0,8 oraz dla parametru k równego 1, 15 i 50 (naturalna wartość k) oraz $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{10}$ (wymierna wartość k).

Tabela	101.	Porównanie	wartości	obciążeń	krytycznych	dla	belki	jednorodnej	na	podłożu	sprężystym
o zmien	nych	właściwościac	ch, uzyska	nych meto	dami analitycz	nym	i i num	erycznymi (k	= 1))	

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	43,221	41,316	39,404	36,779	34,154	31,530	28,179	24,585
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	42,385	40,669	38,752	36,582	34,018	31,218	28,063	24,323
δ	1,93%	1,57%	1,65%	0,54%	0,4%	0,99%	0,41%	1,07%

Tabela 102. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 3)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	43,602	42,078	40,364	38,279	35,868	33,490	30,972	27,402
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	42,83	41,468	39,837	37,94	35,756	33,23	30,322	26,765
δ	1,77%	1,45%	1,31%	0,89%	0,31%	0,78%	2,1%	2,32%

Tabela 103. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 5)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	43,820	42,481	40,941	39,110	36,949	34,703	32,444	29,466
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	43,029	41,866	40,431	38,727	36,738	34,364	31,572	28,079
δ	1,81%	1,45%	1,25%	0,98%	0,57%	0,98%	2,69%	4,71%

Tabela 104. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 10)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	44,114	43,068	41,820	40,513	38,577	36,641	34,705	32,770
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	43,268	42,39	41,27	39,908	38,147	35,979	33,344	30,001
δ	1,92%	1,57%	1,32%	1,49%	1,11%	1,81%	3,92%	8,45%

Tabela 105. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 15)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	44,271	43,412	42,337	41,262	39,584	37,849	36,115	34,381
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	43,386	42,669	41,75	40,625	38,94	36,895	34,38	31,204
δ	2%	1,71%	1,39%	1,54%	1,63%	2,52%	4,8%	9,24%

Tabela 106. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 20)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	44,373	43,620	42,694	41,738	40,252	38,651	37,050	35,449
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	43,461	42,852	42,075	41,062	39,459	37,51	35,104	32,095
δ	2,06%	1,76%	1,45%	1,62%	1,97%	3,11%	5,25%	9,46%

Tabela	107.	Porównanie	wartości	obciążeń	krytycznych	dla	belki	jednorodnej	na	podłożu	sprężystym
o zmien	nych	właściwościac	ch, uzyska	nych meto	dami analitycz	nym	i i num	erycznymi (k	= 30	0)	

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	44,509	43,892	43,190	42,400	41,054	39,614	38,173	36,733
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	43,556	43,087	42,503	41,577	40,113	38,317	36,11	33,396
δ	2,14%	1,83%	1,59%	1,94%	2,29%	3,27%	5,4%	9,08%

Tabela 108. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 40)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	44,603	44,080	43,543	42,860	41,511	40,162	38,813	37,465
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	43,618	43,241	42,781	41,883	40,521	38,852	36,816	34,345
δ	2,21%	1,9%	1,75%	2,28%	2,38%	3,26%	5,15%	8,33%

Tabela 109. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 50)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	44,675	44,223	43,771	43,102	41,814	40,526	39,238	37,949
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	43,664	43,351	42,977	42,092	40,813	39,252	37,363	35,092
δ	2,26%	1,97%	1,81%	2,34%	2,39%	3,14%	4,78%	7,53%

Tabela 110. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi ($\mathbf{k} = \frac{1}{2}$)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	43,072	41,018	38,909	36,239	33,520	30,768	27,117	23,407
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	42,132	40,246	38,227	35,868	33,171	30,28	27,036	23,09
δ	2,18%	1,88%	1,75%	1,02%	1,04%	1,59%	0,3%	1,35%

Tabela 111. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi ($\mathbf{k} = \frac{1}{3}$)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	43,014	40,902	38,683	35,937	33,192	30,446	26,678	22,905
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	42,01	40,038	37,975	35,487	32,746	29,835	26,525	22,491
δ	2,33%	2,11%	1,83%	1,25%	1,34%	2,01%	0,57%	1,81%

Tabela 112. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi ($\mathbf{k} = \frac{1}{4}$)

$\underline{c_1}$	0.1	0.2	03	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
<i>C</i> ₀	0,1	0,2	0,5	0,1	0,5	0,0	0,7	0,0
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	42,983	40,840	38,562	35,777	32,991	30,205	26,450	22,617
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	41,937	39,911	37,82	35,245	32,474	29,559	26,186	22,12
δ	2,43%	2,27%	1,92%	1,49%	1,57%	2,14%	1%	2,2%

<u><i>C</i></u>	0.1	0.2	03	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
<i>C</i> ₀	0,1	€,=	0,0	3,1	0,0	3,3	3,7	0,0
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	42,964	40,802	38,487	35,677	32,866	30,055	26,302	22,391
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	41,888	39,825	37,713	35,074	32,281	29,367	25,938	21,86
δ	2,5%	2,39%	2,01%	1,69%	1,78%	2.29%	1,38%	2,37%

Tabela 113. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi ($\mathbf{k} = \frac{1}{5}$)

Tabela 114. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{6}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	42,951	40,776	38,436	35,608	32,781	29,953	26,140	22,239
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	41,854	39,763	37,634	34,945	32,136	29,223	25,746	21,665
δ	2,55%	2,48%	2,09%	1,86%	1,97%	2,44%	1,51%	2,58%

Tabela 115. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{7}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	42,942	40,757	38,399	35,559	32,719	29,860	26,022	22,130
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	41,828	39,716	37,573	34,845	32,022	29,111	25,59	21,511
δ	2,59%	2,55%	2,15%	2,01%	2,13%	2,51%	1,66%	2,8%

Tabela 116. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi ($\mathbf{k} = \frac{1}{8}$)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	42,934	40,742	38,371	35,521	32,672	29,784	25,933	22,047
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	41,807	39,679	37,525	34,765	31,93	29,019	25,461	21,386
δ	2,62%	2,61%	2,2%	2,13%	2,27%	2,57%	1,82%	3%

Tabela 117. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi ($\mathbf{k} = \frac{1}{9}$)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	42,929	40,731	38,349	35,492	32,635	29,724	25,863	21,982
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	41,791	39,649	37,485	34,698	31,854	28,944	25,351	21,283
δ	2,65%	2,66%	2,25%	2,24%	2,39%	2,62%	1,98%	3,18%

Tabela 118. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednorodnej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi $\left(k = \frac{1}{10}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8		
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	42,924	40,722	38,331	35,468	32,605	29,675	25,807	21,902		
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	41,778	39,624	37,451	34,643	31,791	28,88	25,258	21,194		
δ	2,67%	2,7%	2,3%	2,33%	2,5%	2,68%	2,13%	3,23%		



Rys. 63. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (naturalna wartość parametru k)



Rys. 64. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (naturalna wartość parametru k)



Rys. 65. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (wymierna wartość parametru k)



Rys. 66. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (wymierna wartość parametru k)



Rys. 67. Postacie wyboczenia belki jednorodnej (k = 1)



Rys. 68. Postacie wyboczenia belki jednorodnej (k = 15)



Rys. 69. Postacie wyboczenia belki jednorodnej (k = 50)



Rys. 71. Postacie wyboczenia belki jednorodnej $\left(k = \frac{1}{6}\right)$



Rys. 72. Postacie wyboczenia belki jednorodnej $\left(k = \frac{1}{10}\right)$

Na podstawie powyższych rysunków można stwierdzić, że postacie wyboczenia belki jednorodnej, zarówno dla naturalnych, jak i wymiernych wartości wykładnika potęgowego *k* funkcji kształtu, są do siebie zbliżone co do kształtu przybieranego przez model. Celem analizy było znalezienie postaci wyboczenia, a także wartości obciążeń krytycznych zbliżonych swoją wartością do tych uzyskanych metodą analityczną. Dla belki jednorodnej, w większości przypadków, trybem tym był tryb drugi wyboczenia. Kierunki dalszych badań związane są ze szczegółową analizą wyboczeniową konstrukcji na podłożu sprężystym. Gdy badanie dotyczy wartości obciążeń krytycznych, obliczenie i analiza wszystkich trybów wyboczenia pomaga w znalezieniu słabych punktów modelu MES. Dzięki temu można modyfikować model w taki sposób aby nie dopuścić do wyboczenia w danym trybie.

4.2. Belki trójwarstwowe na podłożu sprężystym

Modele belki trójwarstwowej dyskretyzowano elementami bryłowymi. Rozmiar elementu skończonego wynosił 10 mm (tolerancja 0,5 mm). Całkowita liczba węzłów była równa 19218 natomiast liczba elementów skończonych wynosiła 11575. Siła ściskająca została przyłożona w płaszczyźnie osiowej. Podłoże sprężyste zostało zastąpione układem 24 sprężystych podpór.

Badania MES przeprowadzono na rodzinie belek o takich samych parametrach jakie występowały w obliczeniach analitycznych. Badanie polegało na wyznaczeniu wartości obciążeń krytycznych oraz postaci wyboczenia. Schemat belki, sposoby podparcia i obciążenia, a także model siatki MES pokazano na rysunkach 73–80.



Rys. 73. Belka trójwarstwowa



Rys. 74. Podparcie końców belki



Rys. 77. Obciążenie belki



Rys. 80. Siatka MES

W tabelach 119–154 zamieszczono porównanie wyników analitycznych i numerycznych dotyczących obciążeń krytycznych w belkach trójwarstwowych na podłożu sprężystym. Analiza dotyczyła funkcji kształtu, w której wartość wykładnika potęgowego k była liczbą naturalną. Taką samą analizę, ale dotyczącą wymiernych wartości parametru kształtu k zamieszczono w tabelach 155–190.

Największe różnice w wartościach obciążenia krytycznego pojawiały się dla największych analizowanych wartości amplitudy funkcji c(x). Najmniejsza wartość różnicy, dla tego konkretnego przypadku, wyniosła 9,8%, natomiast największa różnica była rzędu 16,2%. Dla pozostałych wartości amplitudy funkcji kształtu, różnice pomiędzy obliczeniami analitycznymi i numerycznymi były małe. Parametr k, który w przypadku belki jednorodnej wpływał w znaczący sposób na różnice w obliczeniach, dla belki trójwarstwowej nie miał dużego znaczenia. Duże wartości różnicy wynikają, tak jak w poprzednim analizowanym przypadku, z uproszczeń modelu MES oraz większej złożoności konstrukcji (rdzeń i okładziny wykonane z różnych materiałów).

Analiza wyników dla wymiernych wartości parametru k pozwala stwierdzić dużą zgodność pomiędzy obliczeniami analitycznymi i numerycznymi. Wyjątkiem są obliczenia obciążenia krytycznego dla $c_1/c_0 = 0.8$. Różnice w wynikach analitycznych i numerycznych sięgały w niektórych przypadkach 25% (pik na wykresie funkcji kształtu został pominięty w obliczeniach numerycznych powodując występowanie dużych rozbieżności w wynikach). Dla pozostałych wartości amplitudy, wartości różnicy były małe co świadczy o poprawności modeli analitycznego i numerycznego.

Wyniki przedstawione w poniższych tabelach zaprezentowano w formie graficznej na wykresach 81-97 (naturalna wartość parametru *k*) oraz 102-118 (wymierna wartość parametru *k*). Linią ciągłą oznaczono wyniki badań analitycznych, natomiast linią przerywano – badań numerycznych.

Na rysunkach 98–101 (naturalna wartość parametru k) oraz 119–122 (wymierna wartość parametru k) przedstawiono postacie wyboczenia belki trójwarstwowej dla amplitud c_1/c_0 równych 0,1, 0,5 i 0,8 oraz dla parametru k równego 1, 15 i 50 (naturalna wartość k) oraz $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ i $\frac{1}{10}$ (wymierna wartość k).

Podobnie jak w przypadku badań analitycznych, analiza numeryczna belki trójwarstwowej wykazała, że na wartość obciążenia krytycznego wpływała również grubość rdzenia t_c . Wraz ze zmniejszaniem się grubości rdzenia, zwiększała się wartość obciążeń krytycznych. W analizowanym zakresie, największe obciążenia otrzymano dla belki o grubości rdzenia $t_c = 12 mm$. Nie zauważono wpływu grubości rdzenia na zmiany w wartościach obciążeń krytycznych otrzymanych metodami analityczną i numeryczną.

1. Wariant: $t_c = 18 \text{ mm}, t_f = 1 \text{ mm}$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	237,752	227,137	216,521	205,906	195,291	184,675	174,060	163,445
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	228,41	222,31	213,76	202,2	190,18	177,46	163,57	147,38
δ	3,93%	2,13%	1,28%	1,8%	2,62%	3,91%	6,03%	9,83%

Tabela 119. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 1)

Tabela 120. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 3)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	241,553	234,738	227,923	221,108	214,294	207,479	200,664	193,849
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	230,36	226,09	221,38	213,87	203,6	192,04	178,73	162,86
δ	4,63%	3,68%	2.87%	3,27%	4,99%	7,44%	10.93%	15,99%

Tabela 121. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 5)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	242,744	237,121	231,497	225,874	220,251	214,627	209,004	203,380
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	231,13	227,7	223,95	217,89	208,37	197,56	185,11	170,54
δ	4,78%	3,97%	3,26%	3,53%	5,39%	7,95%	11,43%	16,15%

Tabela 122. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 10)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	243,666	238,964	234,262	229,560	224,858	220,156	215,454	210,752
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	232,12	229,82	227,36	221,98	213,68	204,33	193,77	181,78
δ	4,74%	3,83%	2,95%	3,3%	4,97%	7,19%	10,06%	13,75%

Tabela 123. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 15)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	244,044	239,721	235,398	231,074	226,751	222,428	218,105	213,781
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	232,66	230,97	229,2	224,18	216,73	208,42	199,16	188,83
δ	4,66%	3,65%	2,63%	2,98%	4,42%	6,3%	8,69%	11,67%

Tabela 124. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 20)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	244,313	240,258	236,203	232,148	228,093	224,038	219,983	215,928
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	233,01	231,71	230,35	225,81	219,01	211,48	203,16	193,99
δ	4,63%	3,56%	2,48%	2,73%	3,98%	5,61%	7,65%	10,16%

1 ())	2		(
$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	244,720	241,072	237,424	233,776	230,128	226,480	222,833	219,185
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	233,43	232,56	231,67	228,26	222,38	215,95	208,93	201,29
δ	4,61%	3,53%	2,42%	2,36%	3,37%	4,65%	6,24%	8,16%

Tabela 125. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 30)

Tabela 126. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 40)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	245,027	241,686	238,345	235,005	231,664	228,323	224,983	221,642
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	233,66	233,03	232,39	230,05	224,82	219,14	212,99	206,35
δ	4,64%	3,58%	2,5%	2,11%	2,95%	4,02%	5,33%	6,9%

Tabela 127. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 50)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	245,270	242,172	239,074	235,976	232,878	229,779	226,681	223,583
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	233,8	233,32	232,83	231,43	226,69	221,57	216,05	210,13
δ	4,68%	3,66%	2,61%	1,93%	2,66%	3,57%	4,69%	6,02%

2. Wariant: $t_c = 16 \text{ mm}, t_f = 2 \text{ mm}$

Tabela 128. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 1)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	295,450	284,834	274,219	263,604	252,988	242,373	231,758	221,142
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	293,17	282,44	271,4	259,98	248,03	235,22	220,91	203,49
δ	0,77%	0,84%	1,03%	1,37%	1,96%	2,95%	4,68%	7,98%

Tabela 129. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 3)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	299,250	292,436	285,621	278,806	271,991	265,176	258,362	251,547
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	296,79	289,34	281,21	272,2	262,08	250,45	236,69	219,82
δ	0,82%	1,06%	1,54%	2,37%	3,64%	5,55%	8,39%	12,61%

Tabela 130. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 5)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	300,442	294,818	289,195	283,572	277,948	272,325	266,701	261,078
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	297,73	291,54	284,38	276,26	266,99	256,23	243,56	228,38
δ	0,9%	1,11%	1,66%	2,58%	3,94%	5,91%	8,68%	12,52%

op172)00jiii 0 211											
$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8			
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	301,363	296,661	291,959	287,257	282,556	277,854	273,152	268,450			
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	298,85	293,43	287,3	280,27	272,41	263,34	252,91	240,85			
δ	0,83%	1,09%	1,6%	2,43%	3,59%	5,22%	7,41%	10,28%			

Tabela 131. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 10)

Tabela 132. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 15)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	301,742	297,419	293,095	288,772	284,449	280,125	275,802	271,479
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	299,25	294,31	288,77	282,54	275,52	267,6	258,64	248,48
δ	0,83%	1,05%	1,48%	2,16%	3,14%	4,47%	6,22%	8,47%

Tabela 133. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 20)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	302,010	297,955	293,901	289,846	285,791	281,736	277,681	273,626
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	299,54	294,96	289,86	284,17	277,82	270,73	262,8	253,93
δ	0,82%	1,01%	1,37%	1,96%	2,79%	3,91%	5,36%	7,2%

Tabela 134. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 30)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	302,417	298,770	295,122	291,474	287,826	284,178	280,530	276,882
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	299,97	295,93	291,47	286,56	281,17	275,21	268,66	261,44
δ	0,81%	0,95%	1,24%	1,69%	2,31%	3,16%	4,23%	5,58%

Tabela 135. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 40)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	302,725	299,384	296,043	292,702	289,362	286,021	282,680	279,339
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	300,3	296,64	292,64	288,28	283,53	278,33	272,67	266,49
δ	0,8%	0,92%	1,15%	1,51%	2,02%	2,69%	3,54%	4,6%

Tabela 136. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 50)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	302,967	299,869	296,771	293,673	290,575	287,477	284,379	281,281
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	300,55	297,19	293,55	289,59	285,31	280,69	275,63	270,18
δ	0,8%	0,89%	1,09%	1,39%	1,81%	2,36%	3,08%	3,95%

3. Wariant: $t_c = 14 \text{ mm}, t_f = 3 \text{ mm}$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	337,332	326,717	316,102	305,486	294,871	284,256	273,640	263,025
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	335,03	324,29	313,25	301,83	289,82	276,84	262,09	243,43
δ	0,68%	0,74%	0,9%	1,2%	1,71%	2,61%	4,22%	7,45%

Tabela 137. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 1)

Tabela 138. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 3)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	341,133	334,318	327,503	320,689	313,874	307,059	300,244	293,429
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	338,65	331,21	323,08	314,07	303,87	292,02	277,8	260,03
δ	0,73%	0,93%	1,35%	2,06%	3,19%	4,9%	7,48%	11,38%

Tabela 139. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 5)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	342,324	336,701	331,078	325,454	319,831	314,207	308,584	302,961
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	339,79	333,41	326,65	318,13	308,79	297,87	284,87	269,1
δ	0,74%	0,98%	1,34%	2,25%	3,45%	5,2%	7,68%	11,18%

Tabela 140. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 10)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	343,246	338,544	333,842	329,140	324,438	319,736	315,034	310,332
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	340,71	335,29	329,17	322,23	314,29	305,16	294,6	282,32
δ	0,74%	0,96%	1,4%	2,1%	3,13%	4,56%	6,49%	9,03%

Tabela 141. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 15)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	343,624	339,301	334,978	330,655	326,331	322,008	317,685	313,361
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	341,11	336,18	330,66	324,45	317,45	309,53	300,54	290,3
δ	0,73%	0,92%	1,3%	1,88%	2,72%	3,88%	5,4%	7,36%

Tabela 142. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 20)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	343,893	339,838	335,783	331,728	327,673	323,618	319,564	315,509
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	341,4	336,83	331,75	326,1	319,78	312,73	304,81	295,93
δ	0,72%	0,89%	1,2%	1,7%	2,41%	3,36%	4,62%	6,21%

1			· · · ·					
$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	344,3	340,652	337,004	333,356	329,709	326,061	322,413	318,765
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	341,84	337,8	333,37	328,5	323,15	317,26	310,76	303,59
δ	0,71%	0,84%	1,08%	1,46%	1,99%	2,7%	3,61%	4,76%

Tabela 143. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 30)

Tabela 144. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 40)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	344,607	341,266	337,926	334,585	331,244	327,903	324,563	321,222
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	342,17	338,51	334,54	330,22	325,52	320,39	314,8	308,7
δ	0,71%	0,81%	1%	1,3%	1,73%	2,29%	3,01%	3,9%

Tabela 145. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 50)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	344,850	341,752	338,654	335,556	332,458	329,360	326,262	323,164
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	342,42	339,07	339,07	331,53	327,3	322,72	317,77	312,4
δ	0,7%	0,78%	0,12%	1,2%	1,55%	2,02%	2,6%	3,33%

4. Wariant: $t_c = 12 \text{ mm}, t_f = 4 \text{ mm}$

Tabela 146. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 1)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	368,453	357,837	347,222	336,607	325,991	315,376	304,761	294,145
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	365,96	355,23	344,21	332,77	320,71	307,6	289,97	264,83
δ	0,68%	0,73%	0,87%	1,14%	1,62%	2,47%	4,85%	9,97%

Tabela 147. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 3)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	372,253	365,439	358,624	351,809	344,994	338,179	331,365	324,550
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	369,59	362,16	354,03	344,99	334,71	322,66	308,04	289,49
δ	0,72%	0,9%	1,28%	1,94%	2,98%	4,59%	7,04%	10,8%

Tabela 148. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 5)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	373,445	367,821	361,198	356,575	350,951	345,328	339,704	334,081
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	370,72	364,35	357,19	349,05	339,63	328,55	315,26	298,99
δ	0,73%	0,94%	1,11%	2,11%	3,23%	4,86%	7,2%	10,5%

1 ())	2		` '					
$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	374,366	369,664	364,962	360,260	355,559	350,857	346,155	341,453
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	371,64	366,23	360,11	353,16	345,19	335,99	325,3	312,79
δ	0.73%	0.93%	1.33%	1.97%	2.92%	4.24%	6.02%	8.39%

Tabela 149. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 10)

Tabela 150. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 15)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	374,745	370,422	366,098	361,775	357,452	353,128	348,805	344,482
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	372,05	367,12	361,61	355,4	348,39	340,44	331,39	321,04
δ	0,72%	0,89%	1,23%	1,76%	2,54%	3,59%	4,99%	6,8%

Tabela 151. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 20)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	375,013	370,958	366,984	362,849	358,794	354,739	350,684	346,629
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	372,34	367,77	362,7	357,06	350,75	343,69	335,75	326,81
δ	0,71%	0,86%	1,17%	1,6%	2,24%	3,11%	4,26%	5,72%

Tabela 152. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 30)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	375,42	371,773	368,125	364,477	360,829	357,181	353,533	349,885
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	372,78	368,74	364,33	359,48	354,14	348,27	341,78	334,61
δ	0,7%	0,82%	1,03%	1,37%	1,85%	2,49%	3,32%	4,37%

Tabela 153. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 40)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	375,727	372,387	369,046	365,705	362,365	359,024	355,683	352,342
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	373,1	369,46	365,5	361,2	356,52	351,42	345,85	339,76
δ	0,7%	0,79%	0,96%	1,23%	1,61%	2,12%	2,76%	3,57%

Tabela 154. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 50)

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	375,97	372,872	369,774	366,676	363,578	360,480	357,382	354,284
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	373,36	370,01	366,4	362,51	358,3	353,75	348,82	343,48
δ	0,69%	0,77%	0,91%	1,14%	1,45%	1,87%	2,4%	3,05%



Rys. 81. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k = 1)



Rys. 82. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k = 3)



Rys. 83. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k = 5)



Rys. 84. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k = 10)



Rys. 85. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k = 15)



Rys. 86. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k = 20)


Rys. 87. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k = 30)



Rys. 88. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k =40)



Rys. 89. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k = 50)



Rys. 90. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 12 \text{ mm}$)



Rys. 91. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 12 \text{ mm}$)



Rys. 92. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 14 \text{ mm}$)



Rys. 93. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru *k* na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 14 \text{ mm}$)



Rys. 94. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 16$ mm)



Rys. 95. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 16 \text{ mm}$)



Rys. 96. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 18 \text{ mm}$)



Rys. 97. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 18 \text{ mm}$)



Rys. 98. Postacie wyboczenia belki trójwarstwowej ($t_c = 12 \text{ mm}$)



Rys. 99. Postacie wyboczenia belki trójwarstwowej ($t_c = 14 mm$)



Rys. 100. Postacie wyboczenia belki trójwarstwowej ($t_c = 16 mm$)



Rys. 101. Postacie wyboczenia belki trójwarstwowej ($t_c = 18 mm$)

1. Wariant: $t_c = 18 \text{ mm}, t_f = 1 \text{ mm}$

Tabela 155. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{2}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	235,558	222,749	209,940	197,130	184,321	171,512	158,703	145,893
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	227,25	220,1	208,08	195	181,73	168,13	153,94	138,38
δ	3,53%	1,19%	0,89%	1,08%	1,41%	1,97%	3%	5,15%

Tabela 156. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{3} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	234,593	220,818	207,043	193,268	179,494	165,719	151,944	138,169
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	226,71	219,02	205,46	191,63	177,68	163,55	149,08	133,73
δ	3,36%	0,81%	0,76%	0,85%	1,01%	1,31%	1,88%	3,21%

Tabela 157. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{4} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	234,053	219,738	205,424	191,109	176,794	162,480	148,165	133,850
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	226,41	218,15	203,96	189,68	175,32	160,84	146,13	130,83
δ	3,27%	0,72%	0,71%	0,75%	0,83%	1,01%	1,37%	2,26%

Tabela 158. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{5}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	233,709	219,050	204,391	189,732	175,073	160,414	145,755	131,096
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	226,21	217,5	202,99	188,41	173,78	159,05	144,16	128,85
δ	3,21%	0,71%	0,69%	0,7%	0,74%	0,85%	1,09%	1,71%

Tabela 159. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{6}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	233,470	218,572	203,675	188,777	173,879	158,982	144,084	129,186
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	226,07	217,05	202,31	187,52	172,69	157,78	142,75	127,4
δ	3,17%	0,7%	0,67%	0,67%	0,68%	0,76%	0,93%	1,38%

Tabela 160. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{7} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	233,295	218,222	203,149	188,077	173,004	157,931	142,858	127,786
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	225,96	216,71	201,81	186,86	171,87	156,83	141,69	126,3
δ	3,14%	0,69%	0,66%	0,65%	0,66%	0,7%	0,82%	1,16%

			、 υ,					
$\frac{C_1}{C_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	233,161	217,954	202,747	187,541	172,334	157,127	141,921	126,714
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	225,89	216,45	201,43	186,35	171,25	156,1	140,87	125,43
δ	3,12%	0,69%	0,65%	0,64%	0,63%	0,65%	0,74%	1,01%

Tabela 161. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{8}\right)$

Tabela 162. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{9} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	233,055	217,743	202,430	187,118	171,805	156,493	141,180	125,868
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	225,82	216,25	201,12	185,95	170,75	155,51	140,21	124,73
δ	3,1%	0,69%	0,65%	0,62%	0,61%	0,63%	0,69%	0,9%

Tabela 163. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{10}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	232,969	217,571	202,173	186,775	171,377	155,979	140,581	125,183
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	225,77	216,08	200,87	185,62	170,35	155,04	139,67	124,15
δ	3,09%	0,69%	0,64%	0,62%	0,6%	0,6%	0,65%	0,83%

2. Wariant: $t_c = 16 \text{ mm}, t_f = 2 \text{ mm}$

Tabela 164. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{2}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	293,256	280,447	267,637	254,828	242,019	229,210	216,400	203,591
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	291,05	278,33	265,49	252,48	239,24	225,62	211,21	190,72
δ	0,75%	0,75%	0,8%	0,92%	1,15%	1,57%	2,4%	6,32%

Tabela 165. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{3}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	292,290	278,516	264,741	250,966	237,191	223,416	209,642	195,867
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	290,11	276,49	262,8	249,01	235,09	220,95	206,35	176,99
δ	0,75%	0,73%	0,73%	0,78%	0,89%	1,1%	1,57%	9,64%

Tabela 166. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{4}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	291,751	277,436	263,121	248,807	234,492	220,177	205,863	191,548
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	289,58	275,45	261,27	247,02	232,69	218,2	201,62	169,15
δ	0,74%	0,72%	0,7%	0,72%	0,77%	0,9%	2,06%	11,69%

			(<u></u> ,					
$\frac{C_1}{C_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	291,406	276,747	262,088	247,429	232,770	218,111	203,452	188,793
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	289,24	274,78	260,28	245,73	231,11	216,39	197,28	164,11
δ	0,74%	0,71%	0,69%	0,69%	0,71%	0,79%	3,03%	13,07%

Tabela 167. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{5} \right)$

Tabela 168. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{6}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	291,168	276,270	261,372	246,475	231,577	216,679	201,782	186,884
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	289,01	274,32	259,59	244,83	230,01	215,11	194,25	160,59
δ	0,74%	0,71%	0,68%	0,67%	0,68%	0,72%	3,73%	14,07%

Tabela 169. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k}=\frac{1}{7}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	290,992	275,920	260,847	245,774	230,701	215,629	200,556	185,483
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	288,84	273,98	259,09	244,16	229,19	214,15	192,01	158
δ	0,74%	0,7%	0,67%	0,66%	0,65%	0,69%	4,26%	14,82%

Tabela 170. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{8}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	290,859	275,652	260,445	245,238	230,032	214,825	199,618	184,412
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	288,7	273,71	258,7	243,65	228,56	213,41	190,28	156,01
δ	0,74%	0,7%	0,67%	0,65%	0,64%	0,66%	4,68%	15,4%

Tabela 171. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{9}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	290,753	275,440	260,128	244,815	229,503	214,190	198,878	183,566
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	288,6	273,5	258,39	243,24	228,05	212,82	188,92	155,44
δ	0,74%	0,7%	0,69%	0,64%	0,63%	0,64%	5,01%	15,32%

Tabela 172. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{10} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	290,667	275,269	259,871	244,473	229,075	213,677	198,279	182,881
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	288,51	273,34	258,14	242,91	227,65	212,34	187,81	153,16
δ	0,74%	0,7%	0,67%	0,64%	0,62%	0,63%	5,28%	16,25%

3. Wariant: $t_c = 14 \text{ mm}, t_f = 3 \text{ mm}$

Tabela 173. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{2}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	335,139	322,329	309,520	296,711	283,901	271,092	258,283	245,474
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	332,9	320,17	307,32	294,3	281,02	267,3	243,23	213,64
δ	0,69%	0,67%	0,71%	0,81%	1,01%	1,4%	5,83%	12,97%

Tabela 174. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{3} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	334,173	320,398	306,623	292,849	279,074	265,299	251,524	237,749
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	331,96	318,33	304,62	290,81	276,87	262,1	230,64	199,11
δ	0,66%	0,65%	0,65%	0,7%	0,79%	1,21%	8,3%	16,25%

Tabela 175. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{4} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	333,633	319,319	305,004	290,689	276,375	262,060	247,745	233,431
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	331,43	317,28	303,08	288,81	274,45	256,12	223,58	190,99
δ	0,66%	0,64%	0,63%	0,65%	0,7%	2,27%	9,75%	18,18%

Tabela 176. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{5}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	333,289	318,630	303,971	289,312	274,653	259,994	245,335	230,676
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	331,09	316,61	302,09	287,52	272,88	252,29	219,07	185,81
δ	0,66%	0,63%	0,62%	0,62%	0,65%	2,96%	10,71%	19,45%

Tabela 177. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{6}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	333,050	318,152	303,255	288,357	273,460	258,562	243,664	228,767
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	330,85	316,14	301,4	286,61	271,77	249,62	215,95	182,22
δ	0,66%	0,63%	0,61%	0,61%	0,62%	3,46%	11,37%	20,35%

Tabela 178. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k}=\frac{1}{7}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	332,875	317,802	302,730	287,657	272,584	257,511	242,438	227,366
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	330,68	315,8	300,89	285,94	270,95	247,66	213,65	179,58
δ	0,66%	0,63%	0,61%	0,6%	0,6%	3,83%	11,87%	21,02%

			、 υ /					
$\frac{C_1}{C_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	332,741	317,534	302,328	287,121	271,914	256,708	241,501	226,294
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	330,55	315,54	300,5	285,43	270,32	246,16	211,89	177,57
δ	0,66%	0,63%	0,6%	0,59%	0,59%	4,11%	12,26%	21,53%

Tabela 179. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{8} \right)$

Tabela 180. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{9}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	332,635	317,323	302,010	286,698	271,385	256,073	240,761	225,448
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	330,44	315,33	300,19	285,02	269,82	244,98	210,5	175,97
δ	0,66%	0,63%	0,6%	0,59%	0,58%	4,33%	12,57%	21,95%

Tabela 181. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{10} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	332,550	317,152	301,754	286,355	270,957	255,559	240,161	224,763
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	330,36	315,16	299,94	284,69	269,41	244,01	209,38	174,69
δ	0,66%	0,63%	0,6%	0,58%	0,57%	4,52%	12,82%	22,28%

4. Wariant: $t_c = 12 \text{ mm}, t_f = 4 \text{ mm}$

Tabela 182. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{2} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	366,259	353,450	340,640	327,831	315,022	302,213	289,403	276,594
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	363,84	351,11	338,26	325,24	311,94	289,45	259,84	230,18
δ	0,66%	0,66%	0,7%	0,79%	0,98%	4,22%	10,22%	16,78%

Tabela 183. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{3}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	365,293	351,519	337,744	323,969	310,194	296,419	282,645	268,870
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	362,89	349,26	335,56	321,75	307,79	278,42	246,9	215,35
δ	0,66%	0,64%	0,65%	0,68%	0,77%	6,07%	12,65%	19,91%

Tabela 184. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{4} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	364,754	350,439	336,124	321,810	307,495	293,180	278,866	264,551
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	362,36	348,22	334,02	319,75	304,78	272,29	239,73	207,12
δ	0,66%	0,63%	0,63%	0,64%	0,88%	7,13%	14,03%	21,71%

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	364,409	349,750	335,091	320,432	305,773	291,114	276,455	261,796
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	362,02	347,55	333,03	318,46	301,56	268,38	235,16	201,89
δ	0,66%	0,63%	0,62%	0,62%	1,38%	7,81%	14,94%	22,88%

Tabela 185. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{5}\right)$

Tabela 186. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{6}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	364,171	349,273	334,375	319,478	304,580	289,682	274,785	259,887
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	361,79	347,08	332,34	317,55	299,31	265,68	232	198,27
δ	0,65%	0,63%	0,61%	0,6%	1,73%	8,29%	15,57%	23,71%

Tabela 187. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{7}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	363,995	348,923	333,850	318,777	303,704	288,632	273,559	258,486
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	361,61	346,74	331,83	316,88	297,67	263,7	229,68	195,61
δ	0,66%	0,63%	0,61%	0,6%	1,99%	8,64%	16,04%	24,32%

Tabela 188. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{8}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	363,862	348,655	333,448	318,241	303,035	287,828	272,621	257,415
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	361,48	346,47	331,43	316,36	296,41	262,19	227,91	193,58
δ	0,65%	0,63%	0,61%	0,59%	2,19%	8,91%	16,4%	24,8%

Tabela 189. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{9}\right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	363,756	348,443	333,131	317,818	302,506	287,193	271,881	256,569
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	361,38	346,26	331,12	315,96	295,42	260,99	226,51	191,98
δ	0,65%	0,63%	0,6%	0,58%	2,34%	9,12%	16,69%	25,17%

Tabela 190. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\mathbf{k} = \frac{1}{10} \right)$

$\frac{c_1}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_{0,CR}^{Anal}$ [kN]	363,670	348,272	332,874	317,476	302,078	286,680	271,282	255,884
$F_{0,CR}^{MES}$ [kN]	361,29	346,09	330,87	315,62	294,61	260,02	225,38	190,69
δ	0,65%	0,63%	0,6%	0,58%	2,47%	9,3%	16,92%	25,48%



Rys. 102. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($k = \frac{1}{2}$)



Rys. 103. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($k = \frac{1}{2}$)



Rys. 104. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($k = \frac{1}{4}$)



Rys. 105. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($k = \frac{1}{5}$)



Rys. 106. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($k = \frac{1}{c}$)



Rys. 107. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($k = \frac{1}{7}$)



Rys. 108. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($k = \frac{1}{8}$)



Rys. 109. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($k = \frac{1}{\alpha}$)



Rys. 110. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($k = \frac{1}{10}$)



Rys. 111. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 12 \text{ mm}$)



Rys. 112. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 12 \text{ mm}$)



Rys. 113. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 14$ mm)



Rys. 114. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 14 \text{ mm}$)



Rys. 115. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 16$ mm)



Rys. 116. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 16 \text{ mm}$)



Rys. 117. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 18 \text{ mm}$)



Rys. 118. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 18 \text{ mm}$)

Na podstawie rysunków 98–101 oraz 119–122 można stwierdzić, że postacie wyboczenia belki trójwarstwowej, zarówno dla naturalnych, jak i wymiernych wartości wykładnika potęgowego k funkcji kształtu, są do siebie zbliżone co do kształtu przybieranego przez model (2, 3 oraz 4 tryb wyboczenia). Niezależnie od właściwości geometrycznych materiału rdzenia i okładzin, a także właściwości podłoża sprężystego, postać wyboczenia była taka sama. Zmianie ulegały tylko wartości obciążeń krytycznych.



Rys. 119. Postacie wyboczenia belki trójwarstwowej ($t_c = 12 mm$)



Rys. 120. Postacie wyboczenia belki trójwarstwowej ($t_c = 14 \text{ mm}$)



Rys. 121. Postacie wyboczenia belki trójwarstwowej ($t_c = 16 mm$)



Rys. 122. Postacie wyboczenia belki trójwarstwowej ($t_c = 18 \text{ mm}$)

Celem badań przedstawionych w niniejszym rozdziale było porównanie wartości obciążeń krytycznych, uzyskanych metodami analityczną i numeryczną, a także zbadanie wpływu parametrów podłoża sprężystego oraz parametrów geometrycznych belek jednorodnej i trójwarstwowej na wartości $F_{0,CR}$. Głównym zadaniem była analiza stabilności belek na podłożu sprężystym. Podłoże sprężyste w modelu analitycznym zostało opisane za pomocą funkcji matematycznej. Kształt podłoża został uzależniony od kształtu wykresu funkcji, która go opisuje. W przypadku modelu numerycznego, podłoże sprężyste zostało zastąpione układem 24 sprężystych podpór o zmiennych wartościach sztywności. Utworzono modele belek w systemie SolidWorks, zdefiniowano warunki brzegowe, a następnie wyznaczono wartości obciążeń krytycznych dla wybranych rodzin belek. Ponadto przedstawiono tryby wyboczenia i porównano je między sobą.

W przypadku właściwości geometrycznych belek, wpływ na wartości obciążeń krytycznych miała grubość rdzenia t_c . Im mniejsza grubość, tym większa grubość okładzin, posiadających lepsze właściwości mechaniczne (moduł Younga). Decydujący wpływ na właściwości belek miały parametry podłoża sprężystego:

- parametr kształtu k (wykładnik potęgowy funkcji opisującej kształt podłoża sprężystego),
- amplitudy funkcji kształtu c_1/c_0 .

Analiza wyników pozwoliła stwierdzić dużą zgodność pomiędzy obliczeniami analitycznymi i numerycznymi. Wartość różnicy była mała (wyjątek stanowiły jedynie wartości dla $c_1/c_0 = 0.8$). Jeżeli chodzi o postacie wyboczenia to były one do siebie zbliżone co do kształtu przybieranego przez model.

Podsumowanie i wnioski końcowe

Główny cel niniejszej rozprawy doktorskiej dotyczył matematycznej analizy belek jednorodnych i trójwarstwowych na podłożu sprężystym, posiadającym zmienne właściwości geometryczne. Wszystkie belki zostały podparte przegubowo i poddane ściskaniu w płaszczyznach osiowych. Przeprowadzona w dalszej części pracy analiza numeryczna stanowiła weryfikację wyników uzyskanych metodą analityczną. Wyznaczono wartości obciążeń krytycznych dla dwóch rodzajów belek, a następnie dokonano porównania wyników.

Na podstawie uzyskanych wyników można zaobserwować następujące wnioski:

- Wartości sił krytycznych w belkach jednorodnych i trójwarstwowych zależą od geometrycznych właściwości podłoża sprężystego.
- Wartości obciążeń krytycznych $F_{0,CR}$ zmieniają się wraz ze zmianą wartości parametru k (parametr kształtu funkcji opisującej podłoże sprężyste) oraz parametru c_1/c_0 (amplituda funkcji podłoża). Sytuacja to dotyczy zarówno belek jednorodnych jak i trójwarstwowych o symetrycznych właściwościach podłoża.
- W przypadku belki jednorodnej o niesymetrycznych właściwościach podłoża sprężystego, wartości obciążeń krytycznych zależą dodatkowo od parametru przesunięcia funkcji kształtu p.
- Postacie wyboczenia belek jednorodnych i trójwarstwowych, dla naturalnych i wymiernych wartości wykładnika potęgowego k funkcji kształtu podłoża sprężystego, są podobne. Zmianie ulegają jedynie wartości obciążenia krytycznego.
- W przypadku belek trójwarstwowych, wartość obciążenia krytycznego jest dodatkowo uzależniona od grubości rdzenia t_c. Wraz ze zmniejszaniem się grubości rdzenia, zwiększa się wartość F_{0,CR}.
- Powyższe wnioski są zgodne z przyjętą tezą rozprawy doktorskiej.

Kierunki dalszych badań

Dalsze plany badawcze dotyczą analizy stabilności konstrukcji na podłożu sprężystym. Badania związane będą z przygotowaniem modeli analitycznych dla belek i prętów osadzonych na różnych rodzajach podłoża sprężystego, a następnie sprawdzeniu tych model za pomocą metody elementów skończonych. Szczegółowy opis prac przewiduje przygotowanie następujących modeli numerycznych:

- model belki jednorodnej na podłożu sprężysto ciernym;
- model pręta na nieciągłym podłożu sprężystym;
- model pręta na podłożu sprężysto ciernym;
- model pręta na podłożu z tarciem.

Ponadto zostaną przeprowadzone dalsze badania pokrewne z tymi, przeprowadzonymi w ramach niniejszej rozprawy doktorskiej. Dalsze rozważania skupią się na następujących kierunkach:

- opracowanie uogólnionego modelu belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym;
- analiza wpływu parametrów modelu numerycznego (wielkość i liczba elementów skończonych, zagęszczenie siatki itp.) na wartości obciążeń krytycznych w konstrukcjach na podłożu sprężystym;
- analiza wpływu właściwości mechanicznych (zmienne wartości modułu Younga rdzenia i okładzin) i geometrycznych (zmienne grubości okładzin) na wartości obciążeń krytycznych w belkach trójwarstwowych na podłożu sprężystym.

Opracowane modele posłużą do zwiększenia efektywności konstruowania powyższych elementów. Będą one pomocne w badaniach doświadczalnych belek i prętów na podłożu sprężystym, zarówno w zakresie laboratoryjnym jak i przemysłowym.

SPIS RYSUNKÓW

Rysunek	1. Je	dnoparan	netrowy m	odel Winkl	era								7
				M	OD	EL A	ANAL	ITYCZN	Y				
BELKA	JE	DNOW	ARSTWO	WA O	S	YMI	ETRY	CZNYCH	I Wł	Ł <mark>AŚC</mark>	CIWOŚ	CIACH	PODŁOŻA
SPRĘŻY	STE	GO											
Rysunek	2. Sc	hemat be	elki jednov	varstwowej	•••••								37
Rysunek	3. Fu	inkcja ks	ztałtu para	metru $c(x)$		•••••							38
Rysunek	4. Ks	ształt wyl	kresu funk	cji w zależi	10śc	ci od	warto	sci parame	etru $k \dots$				38
Rysunek	5. W	pływ wa	rtości para	metru k ora	z st	osun	ıku c ₁ /	c_0 na warto	ości obc	ciążeń	h krytyc	znych	41
Rysunek	6. W	pływ wa	rtości stos	unku <i>c</i> 1/ <i>c</i> 00	raz	para	metru	k na warto	ości obc	ciążeń	h krytyc	znych	41
Rysunek '	7. W	pływ wa	rtości para	metru <i>k</i> ora	z st	osun	ıku c1/	c_0 na warto	ości obc	ciążeŕ	h krytyc	znych	43
Rysunek	8. W	pływ wa	rtości stos	unku c_1/c_0 o	raz	para	metru	k na warto	ości obc	ciążeń	h krytyc	znych	44
BELKA	JEI	DNOWA	RSTWO	WA O M	NIE	SYN	IETR	YCZNYC	CH W	ŁAŚ	CIWOS	ŚCIACH	PODŁOŻA
SPRĘŻY	STE	GO											
Rysunek	9. Ks	ształty wy	ykresu fun	kcji w zalez	żnoś	ści o	d wart	tości paran	netru k	dla be	elki o ni	esymetrycz	znych
właściwoś	ciacl	h podłoża	a sprężyste	ego		•••••							44
Rysunek	10.	Wpływ	wartości	parametru	k	i p	oraz	stosunku	c_{1}/c_{0}	na w	vartości	obciążeń	krytycznych
(<i>k</i> = 1)	•••••												49
Rysunek	11.	Wpływ	wartości	parametru	k	i p	oraz	stosunku	c_1/c_0	na w	vartości	obciążeń	krytycznych
(<i>k</i> = 3)	•••••												49
Rysunek	12.	Wpływ	wartości	parametru	k	i p	oraz	stosunku	c_1/c_0	na w	vartości	obciążeń	krytycznych
(k = 5)	•••••					•••••				•••••			49
Rysunek	13.	Wpływ	wartości	parametru	k	i p	oraz	stosunku	c_1/c_0	na w	vartości	obciążeń	krytycznych
(k = 10)	•••••					•••••				•••••			50
Rysunek	14.	Wpływ	wartości	parametru	k	i p	oraz	stosunku	c_1/c_0	na w	vartości	obciążeń	krytycznych
(k = 15)	•••••												50
Rysunek	15.	Wpływ	wartości	parametru	k	i p	oraz	stosunku	c_1/c_0	na w	vartości	obciążeń	krytycznych
(k = 20)	•••••												50

Rysunek	16.	Wpływ	wartośc	ci par	ametru	k	i	р	oraz	stosui	nku	c_{1}/c_{0}	na	wart	ości	obcia	ążeń	kryty	cznych
(k = 30)							••••				•••••				•••••	•••••			51
Rysunek	17.	Wpływ	wartośc	ci par	ametru	k	i	р	oraz	stosui	nku	c_{1}/c_{0}	na	wart	ości	obcia	ążeń	kryty	cznych
(k = 40)							••••				•••••				•••••				51
Rysunek	18.	Wpływ	wartośc	ci par	ametru	k	i	р	oraz	stosui	nku	c_{1}/c_{0}	na	wart	ości	obcia	ążeń	kryty	cznych
(k = 50)							••••				•••••				•••••				51
BELKA 1	ΓRÓ	JWARS	STWOW	A															
Rysunek	19. S	chemat	belki trój	warstv	wowej		••••				•••••				•••••				52
Rysunek	20. K	Clasyczn	a hipotez	za linii	łaman	ej	••••				•••••				•••••				52
Rysunek	21. V	Vpływ w	vartości s	tosunl	c_{1}/c_{0}	ora	ız z	zm	ienny	ch grul	bości	i rdze	nia 1	1a wa	rtośc	i obc	iążeń	kryty	cznych
(<i>k</i> =1)							••••			•••••					•••••	••••			64
Rysunek	22. V	Vpływ w	vartości s	tosunl	c_1/c_0	ora	ız z	zm	ienny	ch grul	bości	i rdze	nia 1	na wa	rtośc	i obci	iążeń	kryty	cznych
(<i>k</i> =3)							••••				•••••				•••••				64
Rysunek	23. V	Vpływ w	vartości s	tosunl	c_{1}/c_{0}	ora	ız z	zm	ienny	ch grul	bości	i rdze	nia 1	na wa	rtośc	i obci	iążeń	kryty	cznych
(<i>k</i> =5)							••••				•••••				•••••				64
Rysunek	24. V	Vpływ w	vartości s	tosunl	c_{1}/c_{0}	ora	ız z	zm	ienny	ch grul	bości	i rdze	nia 1	na wa	rtośc	i obci	iążeń	kryty	cznych
(<i>k</i> =10)							••••				•••••				•••••				65
Rysunek	25. V	Vpływ w	vartości s	tosunl	c_{1}/c_{0}	ora	ız z	zm	ienny	ch grul	bości	i rdze	nia 1	1a wa	rtośc	i obci	iążeń	kryty	cznych
(<i>k</i> =15)							••••								•••••	•••••			65
Rysunek	26. V	Vpływ w	vartości s	tosunl	c_{1}/c_{0}	ora	ız z	zm	ienny	ch grul	bości	i rdze	nia 1	na wa	rtośc	i obci	iążeń	kryty	cznych
(<i>k</i> =20)							••••								•••••	•••••			65
Rysunek	27. V	Vpływ w	vartości s	tosunl	c_{1}/c_{0}	ora	ız z	zm	ienny	ch grul	bości	i rdze	nia 1	na wa	rtośc	i obci	iążeń	kryty	cznych
(<i>k</i> =30)							••••				•••••				•••••				66
Rysunek	28. V	Vpływ w	vartości s	tosunl	c_{1}/c_{0}	ora	ız z	zm	ienny	ch grul	bości	i rdze	nia 1	na wa	rtośc	i obci	iążeń	kryty	cznych
(<i>k</i> =40)							••••			•••••					•••••	••••			66
Rysunek	29. V	Vpływ w	vartości s	tosunl	c_1/c_0	ora	ız z	zm	ienny	ch grul	bości	i rdze	nia 1	na wa	rtośc	i obci	iążeń	kryty	cznych
(<i>k</i> =50)							••••								•••••				66
Rysunek	30.	Wpływ	v warto	ści p	arameti	u	k	01	raz s	tosunk	u c	1/c0 1	na	warto	ści	obcią	żeń	kryty	cznych
$(t_c = 12 \text{ m})$	m)																		67

Rysunek	31.	Wpływ	wartości	stosunku	c_{1}/c_{0}	oraz	paramet	tru k	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 12 \text{ mm})$	n)								•••••			67
Rysunek	32.	Wpływ	wartości	parametru	k o	oraz s	stosunku	c_{1}/c_{0}	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 14 \text{ mm})$	n)					•••••			•••••			67
Rysunek	33.	Wpływ	wartości	stosunku	c_{1}/c_{0}	oraz	paramet	tru k	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 14 \text{ mm})$	n)					•••••			•••••			68
Rysunek	34.	Wpływ	wartości	parametru	k o	oraz s	stosunku	c_{1}/c_{0}	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 16 \text{ mm})$	n)					•••••			•••••			68
Rysunek	35.	Wpływ	wartości	stosunku	c_{1}/c_{0}	oraz	paramet	tru k	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 16 \text{ mm})$	n)					•••••			•••••			68
Rysunek	36.	Wpływ	wartości	parametru	k o	oraz s	stosunku	c_1/c_0	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 18 \text{ mm})$	n)					•••••			•••••			69
Rysunek	37.	Wpływ	wartości	stosunku	c_{1}/c_{0}	oraz	paramet	tru k	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 18 \text{ mm})$	n)					•••••			•••••		•••••	69
Rysunek 3	38. W	pływ wa	rtości stosi	unku c_1/c_0 o	oraz zn	nienny	rch grubo	ści rdz	zenia	na wartos	ści obciążeń	h krytycznych
$\left(k=\frac{1}{2}\right)\dots$	••••								•••••			77
Rysunek 3	39. W	pływ wa	rtości stosu	unku c_1/c_0 o	oraz zn	nienny	rch grubo	ści rdz	zenia	na wartos	ści obciążeń	h krytycznych
$\left(k=\frac{1}{3}\right)\dots$												77
Rysunek 4	40. W	pływ wa	rtości stosu	unku c_1/c_0 o	oraz zn	nienny	rch grubo	ści rdz	zenia	na wartos	ści obciążeń	h krytycznych
$\left(k=\frac{1}{l}\right)\dots$												
Rvsunek 4	41. W	pływ wa	rtości stosu	ınku cı/coo	oraz zn	niennv	rch grubo	ści rdz	zenia	na wartos	ści obciażeń	h krytycznych
$\left(k=\frac{1}{2}\right)$		1,5				5	U				Ľ	78
$\binom{n}{5}$	10 W	· 1+ ····	nto áci stos				ah amha	ر من مط		ma mantai	áci chcic≑c∕	
	42. W	piyw wa	riosci siosi	c_{1}/c_{0} C	oraz zn	nenny	ch grubo	sci ra	zenia	na wartos	sci obciązer	i krytycznych
$\left(k=\frac{1}{6}\right)\dots$	••••					•••••			•••••			78
Rysunek 4	13. W	pływ wa	rtości stosi	unku c_1/c_0 o	oraz zn	nienny	rch grubo	ści rdz	zenia	na wartos	ści obciążeń	h krytycznych
$\left(k=\frac{1}{7}\right)\dots$	••••								•••••			79
Rysunek 4	14. W	pływ wa	rtości stosu	unku c_1/c_0 o	oraz zn	nienny	rch grubo	ści rdz	zenia	na wartos	ści obciążeń	h krytycznych
$\left(k=\frac{1}{8}\right)\dots$	••••					•••••			•••••			79

Rysunek	45. W	/pływ wa	rtości stosi	unku c_1/c_0 o	raz zn	nienny	rch grubo	sci rdz	zenia	na wartoś	ci obciążeń	h krytycznych
$\left(k=\frac{1}{9}\right)$	•••••				•••••							79
Rysunek	46. W	/pływ wa	rtości stosi	unku c_1/c_0 o	raz zn	nienny	rch grubo	ości rdz	enia	na wartoś	ci obciążeń	ı krytycznych
$\left(k = \frac{1}{10}\right).$	•••••				•••••							80
Rysunek	47.	Wpływ	wartości	parametru	k o	oraz s	stosunku	c_{1}/c_{0}	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 12 \text{ m})$	m)						•••••			•••••		80
Rysunek	48.	Wpływ	wartości	stosunku	c_{1}/c_{0}	oraz	parame	tru k	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 12 \text{ m})$	m)						•••••			•••••		80
Rysunek	49.	Wpływ	wartości	parametru	k o	oraz s	stosunku	c_1/c_0	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 14 \text{ m})$	m)											81
Rysunek	50.	Wpływ	wartości	stosunku	c_{1}/c_{0}	oraz	parame	tru k	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 14 \text{ m})$	m)						•••••					81
Rysunek	51.	Wpływ	wartości	parametru	k o	oraz s	stosunku	c_{1}/c_{0}	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 16 \text{ m})$	m)						•••••					81
Rysunek	52.	Wpływ	wartości	stosunku	c_{1}/c_{0}	oraz	parame	tru k	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 16 \text{ m})$	m)											82
Rysunek	53.	Wpływ	wartości	parametru	k o	oraz s	stosunku	c_{1}/c_{0}	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 18 \text{ m})$	m)				•••••							82
Rysunek	54.	Wpływ	wartości	stosunku	c_{1}/c_{0}	oraz	parame	tru k	na	wartości	obciążeń	krytycznych
$(t_c = 18 \text{ m})$	m)											82

MODEL NUMERYCZNY

BELKA JEDNOWARSTWOWA

Rysunek 55. Belka jednowarstwowa	
Rysunek 56. Podparcie końców belki	85
Rysunek 57. Podparcie sprężyste belki	86
Rysunek 58. Podparcie końców belki wraz z podparciem sprężystym	86
Rysunek 59. Obciążenie belki	86
Rysunek 60. Obciążenie belki wraz z podparciami	87
Rysunek 61. Siatka MES	
Rysunek 62. Siatka MES	87

Rysunek 63. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych
metodami analityczną i numeryczną (naturalna wartość parametru k)92
Rysunek 64. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych
metodami analityczną i numeryczną (naturalna wartość parametru k)92
Rysunek 65. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych
metodami analityczną i numeryczną (wymierna wartość parametru k)92
Rysunek 66. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych uzyskanych
metodami analityczną i numeryczną (wymierna wartość parametru k)93
Rysunek 67. Postacie wyboczenia belki jednowarstwowej ($k = 1$)
Rysunek 68. Postacie wyboczenia belki jednowarstwowej ($k = 15$)
Rysunek 69. Postacie wyboczenia belki jednowarstwowej ($k = 50$)
Rysunek 70. Postacie wyboczenia belki jednowarstwowej $\left(k = \frac{1}{2}\right)$
Rysunek 71. Postacie wyboczenia belki jednowarstwowej $\left(k = \frac{1}{6}\right)$
Rysunek 72. Postacie wyboczenia belki jednowarstwowej $\left(k = \frac{1}{10}\right)$

BELKA TRÓJWARSTWOWA

Rysunek 73. Belka trójwarstwowa	97
Rysunek 74. Podparcie końców belki	97
Rysunek 75. Podparcie sprężyste belki	98
Rysunek 76. Podparcie końców belki wraz z podparciem sprężystym	98
Rysunek 77. Obciążenie belki	98
Rysunek 78. Obciążenie belki wraz z podparciami	99
Rysunek 79. Siatka MES	99
Rysunek 80. Siatka MES	99
Rysunek 81. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń	krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k =1)	107
Rysunek 82. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń	krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k =3)	107
Rysunek 83. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń	krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k =5)	107

Rysunek 84. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k =10)108
Rysunek 85. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k =15)108
Rysunek 86. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k =20)108
Rysunek 87. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k =30)109
Rysunek 88. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k =40)109
Rysunek 89. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną (k =50)109
Rysunek 90. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 12 \text{ mm}$)110
Rysunek 91. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 12 \text{ mm}$)110
Rysunek 92. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 14 \text{ mm}$)110
Rysunek 93. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 14 \text{ mm}$)111
Rysunek 94. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 16 \text{ mm}$)111
Rysunek 95. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 16 \text{ mm}$)111
Rysunek 96. Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 18 \text{ mm}$)112
Rysunek 97. Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych
uzyskanych metodami analityczną i numeryczną ($t_c = 18 \text{ mm}$)112
Rysunek 98. Postacie wyboczenia belki trójwarstwowej ($t_c = 12 mm$)113
Rysunek 99. Postacie wyboczenia belki trójwarstwowej ($t_c = 14 mm$)

Rysunek 100. Postacie wyboczenia belki trójwarstwowej ($t_c = 16 \text{ } mm$)114 **Rysunek 102.** Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń **Rysunek 103.** Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń **Rysunek 104.** Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń **Rysunek 105.** Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń Rysunek 106. Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń **Rysunek 107.** Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń **Rysunek 108.** Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń **Rysunek 109.** Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń **Rysunek 110.** Wpływ wartości stosunku c_1/c_0 oraz zmiennych grubości rdzenia na wartości obciążeń **Rysunek 111.** Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych **Rysunek 112.** Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych **Rysunek 113.** Wpływ wartości parametru k oraz stosunku c_1/c_0 na wartości obciążeń krytycznych **Rysunek 114.** Wpływ stosunku c_1/c_0 oraz wartości parametru k na wartości obciążeń krytycznych

Rysunek	115.	Wpływ	wartości	parametru	k oraz	stosunku	c_1/c_0 na	wartości	obciążeń	krytycznych
uzyskanyc	h meto	odami ana	alityczną i	numeryczną	$t_c = 16$	mm)				125
Rysunek	116.	Wpływ	stosunku	c_1/c_0 oraz	wartośc	i parame	tru <i>k</i> na	wartości	obciążeń	krytycznych
uzyskanyc	h meto	odami ana	alityczną i	numeryczną	$t_c = 16$	mm)				
Rysunek	117.	Wpływ	wartości	parametru	k oraz	stosunku	c_1/c_0 na	wartości	obciążeń	krytycznych
uzyskanyc	h meto	odami ana	alityczną i	numeryczną	$t_c = 18$	mm)				126
Rysunek	118.	Wpływ	stosunku	c_1/c_0 oraz	wartośc	i parame	tru <i>k</i> na	wartości	obciążeń	krytycznych
uzyskanyc	h meto	odami ana	alityczną i	numeryczną	$t_c = 18$	mm)				126
Rysunek	119. Po	ostacie w	yboczenia	belki trójwa	rstwowej	$(t_c = 12)$	mm)			
Rysunek	1 20. Po	ostacie w	yboczenia	belki trójwa	rstwowej	$(t_c = 14)$	mm)			127
Rysunek	121. Po	ostacie w	yboczenia	belki trójwa	rstwowej	$(t_c = 16)$	mm)			128
Rysunek	122. Po	ostacie w	yboczenia	belki trójwa	rstwowej	$(t_c = 18)$	mm)			128

MODEL ANALITYCZNY

BELKA JEDNOWARSTWOWA O SYMETRYCZNYCH WŁAŚCIWOŚCIACH PODŁOŻA SPRĘŻYSTEGO

Tabela 1. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednowarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 1$)
Tabela 2. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednowarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 3$)
Tabela 3. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednowarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 5$)
Tabela 4. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednowarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 10$)40
Tabela 5. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednowarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 15$)40
Tabela 6. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednowarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 20$)
Tabela 7. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednowarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 30$)40
Tabela 8. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednowarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 40$)
Tabela 9. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednowarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 50$)
Tabela 10. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednowarstwowej
na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{2}\right)$ 42
Tabela 11. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki jednowarstwowej
na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{2}\right)$
Tabela 12. Wartości obciażeń krytycznych i napreżeń normalnych dla belki iednowarstwowej
na nadložu spražustvim o zmionnych ukościwaścioch $(k = 1)$
na pourozu spręzystym o zmiennych wraschwosciach $\left(\kappa - \frac{1}{4}\right)$

BELKA JEDNOWARSTWOWA O NIESYMETRYCZNYCH WŁAŚCIWOŚCIACH PODŁOŻA SPRĘŻYSTEGO

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 18 \text{ mm}, t_f = 1 \text{ mm}$)

Tabela 28. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu Tabela 29. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu Tabela 30. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu Tabela 31. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu Tabela 32. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu Tabela 33. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu Tabela 34. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu Tabela 35. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu Tabela 36. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 16 \text{ mm}, t_f = 2 \text{ mm}$)

Tabela	37.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężys	tym o	o zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = 1)$						•••••	59
Tabela	38.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	i naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężys	tym o	o zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = 3)$						•••••	59
Tabela	39.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	i naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężys	tym o	o zmiennyo	ch właściw	vościach ($k = 5$)							59

Tabela	40.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	tym o	o zmiennyo	ch właściw	rościach ($k = 1$	0)						59
Tabela	41.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	tym o	o zmiennyo	ch właściw	rościach ($k = 1$	5)						59
Tabela	42.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	tym o	o zmiennyo	ch właściw	rościach ($k = 2$	20)						60
Tabela	43.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	tym o	o zmiennyo	ch właściw	rościach ($k = 3$	30)						60
Tabela	44.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	tym o	o zmiennyo	ch właściw	ościach ($k = 4$	40)						60
Tabela	45.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	tym o	o zmiennyc	ch właściw	ościach ($k = 5$	50)					•••••	60

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 14 \text{ mm}, t_f = 3 \text{ mm}$)

Tabela 46. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłoz	żu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 1$)	50
Tabela 47. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłoz	żu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 3$)	50
Tabela 48. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłoz	żu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 5$)	51
Tabela 49. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłoz	żu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 10$)	51
Tabela 50. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłoz	żu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 15$)	51
Tabela 51. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłoz	żu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 20$)	51
Tabela 52. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłoz	żu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 30$)	51
Tabela 53. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłoz	żu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 40$)	51

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 12 \text{ mm}, t_f = 4 \text{ mm}$)

sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 1)$	Tabela	55.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
Tabela 56. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 3)$	sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 1$)62											
sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 3)$	Tabela	56.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
Tabela 57. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 5)$	sprężyst	tym o	o zmiennyo	h właściw	vościach ($k = 3$)						•••••	62
sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 5)$	Tabela	57.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
Tabela 58. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 10)$ Tabela 59. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 15)$ Tabela 60. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 20)$ Tabela 61. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 30)$ sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 30)$ Sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 40)$ Sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 40)$ Sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 50)$	sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	rościach ($k = 5$)							62
sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 10)$	Tabela	58.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
Tabela 59. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 15)$ Tabela 60. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 20)$ 63Tabela 61. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 30)$ 63Tabela 62. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 30)$ 63Tabela 63. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 40)$ 63Tabela 63. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 50)$	sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	rościach ($k = 10$)						62
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 15$)	Tabela	59.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
Tabela 60. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 20$)	sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	rościach ($k = 15$)					•••••	62
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 20$)	Tabela	60.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
Tabela 61. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 30)$ Tabela 62. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 40)$ 63Tabela 63. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu63sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = 40)$ 63636363636465656566666768696963636364656565666667686969636364656565666667686869696961616263646565666667686869696969696969696969616263646565666667<	sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 20$)63											
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 30$)	Tabela	61.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
Tabela 62. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 40$)Tabela 63. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 50$)	sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	rościach ($k = 30$)						63
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 40$)	Tabela	62.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
Tabela 63. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożusprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 50$)	sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	rościach ($k = 40$)					•••••	63
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 50$)	Tabela	63.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
	sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	rościach ($k = 50$)					•••••	63

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 18 \text{ mm}, t_f = 1 \text{ mm}$)

Tabela	64.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężys	stym o	o zmienny	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{2})$							70
Tabela	65.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężys	stym (o zmienny	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{3})$							70
Tabela	66.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężys	stym o	o zmienny	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{4})$							70
Tabela 67. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu											
--											
sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = \frac{1}{5})$ 70											
Tabela 68. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu											
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = \frac{1}{6}$)70											
Tabela 69. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu											
sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = \frac{1}{7})$											
Tabela 70. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu											
sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = \frac{1}{8})$											
Tabela 71. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu											
sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = \frac{1}{9})$											
Tabela 72. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu											
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = \frac{1}{10}$)71											

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 16 \text{ mm}, t_f = 2 \text{ mm}$)

Tabela '	73.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężysty	/m o	zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{2})$			•••••	•••••		•••••	71
Tabela '	74.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężysty	/m o	zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{3})$			•••••	•••••		••••	72
Tabela '	75.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężysty	/m o	zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{4})$			•••••	•••••		•••••	72
Tabela '	76.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężysty	/m o	zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{5})$			•••••	•••••		••••	72
Tabela '	77.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężysty	m o	zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{6})$							72
Tabela '	78.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężysty	/m o	zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{7})$			•••••	•••••		•••••	72
Tabela '	79.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężysty	vm o	zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{8})$			•••••				73

Tabela	80.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężys	tym o	o zmiennyo	ch właściw	vościach ($k = \frac{1}{9}$)						73
Tabela	81.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężys	tym o	o zmiennyo	ch właściw	vościach ($k = \frac{1}{10}$	<u>.</u>)						73

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 14 \text{ mm}, t_f = 3 \text{ mm}$)

Tabela	82.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{2})$.							73
Tabela	83.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{3})$.							73
Tabela	84.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{4})$.				•••••			74
Tabela	85.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{5})$.							74
Tabela	86.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{6})$.							74
Tabela	87.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{7})$.							74
Tabela	88.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{8})$.							74
Tabela	89.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{9})$.							75
Tabela	90.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	o zmiennyo	ch właściw	vościach $(k = \frac{1}{10})$							75

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 12 \text{ mm}, t_f = 4 \text{ mm}$)

Tabela 92. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = \frac{1}{3})$
Tabela 93. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = \frac{1}{4})$
Tabela 94. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = \frac{1}{5}$)
Tabela 95. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = \frac{1}{6}$)
Tabela 96. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = \frac{1}{7}$)
Tabela 97. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = \frac{1}{8}$)
Tabela 98. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $(k = \frac{1}{9})$
Tabela 99. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = \frac{1}{10}$)
Tabela 100. Zestawienie wyników badań analitycznych dla belek jedno- i trójwarstwowych

MODEL NUMERYCZNY

BELKA JEDNOWARSTWOWA

Tabela 101. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystymo zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 1)Tabela 102. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystymo zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 3)Tabela 103. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystymo zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 5)Tabela 103. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystymo zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 5)Tabela 104. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystymo zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 10)metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 15)metości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystymmetości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystym</td

Tabela 106. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystym Tabela 107. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 30)90 Tabela 108. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi (k = 40)90 Tabela 109. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystym Tabela 110. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi ($k = \frac{1}{2}$)......90 Tabela 111. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi ($k = \frac{1}{3}$)......90 Tabela 112. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystym Tabela 113. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystym Tabela 114. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu spreżystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi ($k = \frac{1}{6}$)......91 Tabela 115. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi ($k = \frac{1}{7}$)......91 Tabela 116. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystym Tabela 117. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi ($k = \frac{1}{9}$).....91 Tabela 118. Porównanie wartości obciążeń krytycznych dla belki jednowarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach, uzyskanych metodami analitycznymi i numerycznymi ($k = \frac{1}{10}$)......91

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 18 \text{ mm}, t_f = 1 \text{ mm}$)

Tabela 11	19.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwow	ej	na	podłożu
sprężystyn	noz	zmiennycł	n właściwo	ościach ($k = 1$)								101
Tabela 12	20.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwow	ej	na	podłożu
sprężystyn	noz	zmiennycł	n właściwo	ościach ($k = 3$)								101
Tabela 12	21.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwow	ej	na	podłożu
sprężystyn	noz	zmiennycł	n właściwo	ościach ($k = 5$)								101
Tabela 12	22.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwow	ej	na	podłożu
sprężystyn	noz	zmiennycł	n właściwo	ościach (<i>k</i> = 10)							101
Tabela 12	23.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwow	ej	na	podłożu
sprężystyn	noz	zmiennycł	n właściwo	ościach (<i>k</i> = 15)							101
Tabela 12	24.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwow	ej	na	podłożu
sprężystyn	noz	zmiennycł	n właściwo	ościach ($k = 20$)							101
Tabela 12	25.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwow	ej	na	podłożu
sprężystyn	noz	zmiennycł	n właściwo	ościach ($k = 30$)							102
Tabela 12	26.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwow	ej	na	podłożu
sprężystyn	noz	zmiennycł	n właściwo	ościach ($k = 40$)						•••••	102
Tabela 12	27.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwow	ej	na	podłożu
sprężystyn	noz	zmiennycł	n właściwo	ościach ($k = 50$)							102

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 16 \text{ mm}, t_f = 2 \text{ mm}$)

Tabela 128. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 1$)102
Tabela 129. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 3$)
Tabela 130. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 5$)102
Tabela 131. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 10$)103
Tabela 132. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 15$)

Tabela	133.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	tym o	zmiennycl	h właściwo	ościach ($k = 20$)					•••••	103
Tabela	134.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	tym o	zmiennycl	h właściwo	ościach ($k = 30$)					•••••	103
Tabela	135.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	tym o	zmiennycl	h właściwo	ościach ($k = 40$)					•••••	103
Tabela	136.	Wartości	obciążeń	krytycznych i	naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężys	tym o	zmiennycl	h właściwo	ościach ($k = 50$)					•••••	103

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 14 \text{ mm}, t_f = 3 \text{ mm}$)

Tabela 137. Wartości obciążeń krytycznych i napreżeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 1).....104 Tabela 138. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu Tabela 139. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 5).....104 Tabela 140. Wartości obciążeń krytycznych i napreżeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu sprężystym o zmiennych właściwościach (k = 10)......104 Tabela 141. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu Tabela 142. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu Tabela 143. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu Tabela 144. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu Tabela 145. Wartości obciażeń krytycznych i napreżeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 12 \text{ mm}, t_f = 4 \text{ mm}$)

Tabela	146.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	zmiennycl	h właściwo	ościach ($k = 1$)							105

Tabela 147. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 3$)105
Tabela 148. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 5$)105
Tabela 149. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 10$)106
Tabela 150. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 15$)106
Tabela 151. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 20$)106
Tabela 152. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 30$)106
Tabela 153. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 40$)106
Tabela 154. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach ($k = 50$)106

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 18 \text{ mm}, t_f = 1 \text{ mm}$)

Tabela 155. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{2} \right)$ 115
Tabela 156. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{3} \right)$ 115
Tabela 157. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{4} \right)$ 115
Tabela 158. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{5} \right)$
Tabela 159. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{6} \right)$ 115
Tabela 160. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{7} \right)$ 115

Tabela 161. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń no	rmalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{8}\right)$	
Tabela 162. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń no	rmalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{9}\right)$	
Tabela 163. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń no	rmalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{10}\right)$	

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 16 \text{ mm}, t_f = 2 \text{ mm}$)

Tabela 164. Wa	artości obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla belki	trójwarstwowej	na podłożu
sprężystym o zm	iennych właściwo	sciach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{2} \right)$	$\left(\frac{1}{2}\right)$				116
Tabela 165. Wa	artości obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla belki	trójwarstwowej	na podłożu
sprężystym o zm	iennych właściwo	sciach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{3} \right)$	$\left(\frac{1}{3}\right)$				116
Tabela 166. Wa	artości obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla belki	trójwarstwowej	na podłożu
sprężystym o zm	iennych właściwo	sciach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{4} \right)$	<u>l</u>)				116
Tabela 167. Wa	artości obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla belki	trójwarstwowej	na podłożu
sprężystym o zm	iennych właściwo	sciach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{2} \right)$	$\left(\frac{1}{5}\right)$				117
Tabela 168. Wa	artości obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla belki	trójwarstwowej	na podłożu
sprężystym o zm	iennych właściwo	sciach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{e} \right)$	$\left(\frac{1}{5}\right)$				117
Tabela 169. Wa	artości obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla belki	trójwarstwowej	na podłożu
sprężystym o zm	iennych właściwo	sciach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{2} \right)$	$\left(\frac{1}{7}\right)$				117
Tabela 170. Wa	artości obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla belki	trójwarstwowej	na podłożu
sprężystym o zm	iennych właściwo	sciach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{4} \right)$	$\left(\frac{1}{3}\right)$				117
Tabela 171. Wa	artości obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla belki	trójwarstwowej	na podłożu
sprężystym o zm	iennych właściwo	sciach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{2} \right)$	<u>,</u>)				117
Tabela 172. Wa	artości obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla belki	trójwarstwowej	na podłożu
sprężystym o zm	iennych właściwo	sciach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{2} \right)$	$\left(\frac{1}{10}\right)$				117

BELKA TRÓJWARSTWOWA ($t_c = 14 \text{ mm}, t_f = 3 \text{ mm}$)

Tabela	173.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naj	prężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstw	vowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	zmiennycl	1 właściwc	ościach ($k =$	$\frac{1}{2}$)								118
Tabela	174.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naj	prężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstw	vowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	zmiennycl	1 właściwc	ościach $(\mathbf{k} =$	$\left(\frac{1}{3}\right)$								118
Tabela	175.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naj	prężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstw	vowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	zmiennycl	1 właściwc	ościach ($\boldsymbol{k} =$	$\left(\frac{1}{4}\right)$								118
Tabela	176.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naj	prężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstw	vowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	zmiennycl	1 właściwc	ościach ($k =$	$\left(\frac{1}{5}\right)$			•••••					118
Tabela	177.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naj	prężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstw	vowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	zmiennycl	1 właściwo	ościach ($k =$	$\left(\frac{1}{6}\right)$			•••••				•••••	118
Tabela	178.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naj	prężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstw	vowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	zmiennycł	ı właściwo	ościach ($k =$	$\left(\frac{1}{7}\right)$								118
Tabela	179.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naj	prężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstw	vowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	zmiennycl	1 właściwc	ościach ($k =$	$\left(\frac{1}{8}\right)$							•••••	119
Tabela	180.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naj	prężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstw	vowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	zmiennycl	1 właściwc	ościach $(\mathbf{k} =$	$\left(\frac{1}{9}\right)$							•••••	119
Tabela	181.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naj	prężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstw	vowej	na	podłożu
sprężyst	ym o	zmiennycl	1 właściwc	ościach ($\boldsymbol{k} =$	$\frac{1}{10}$)								119
BELKA	TRO	ÓJWARS	ГWOWA	$(t_c = 12 \text{ mm})$	$t_{f} = 4$	l mm)							

Tabela	182.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężys	tym o	zmiennycł	n właściwo	ościach $(k =$	$\left(\frac{1}{2}\right)$		•••••				119
Tabela	183.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężys	tym o	zmiennycl	n właściwo	ościach $(\mathbf{k} =$	$\left(\frac{1}{3}\right)$			•••••			119
Tabela	184.	Wartości	obciążeń	krytycznych	i naprężeń	normalnych	dla	belki	trójwarstwowej	na	podłożu
sprężys	tym o	zmiennycl	n właściwo	ościach ($k =$	$\left(\frac{1}{4}\right)$			•••••			119

Tabela 185. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{5} \right)$
Tabela 186. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{6} \right)$
Tabela 187. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{7} \right)$
Tabela 188. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(\boldsymbol{k} = \frac{1}{8} \right)$
Tabela 189. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{9} \right)$
Tabela 190. Wartości obciążeń krytycznych i naprężeń normalnych dla belki trójwarstwowej na podłożu
sprężystym o zmiennych właściwościach $\left(k = \frac{1}{10}\right)$

Literatura:

- [1] M. Ataman, *Nieinercyjne, sprężyste modele podłoża odksztalcalnego w zadaniach z mechaniki konstrukcji*, Logistyka 3 (2014) 104-113.
- [2] A.D. Kerr, *Elastic and viscoelastic foundation models*, J. Appl. Mech. 31(3) (1964) 491-498.
- [3] M. Hetényi, Beams on elastic foundations, University of Michigan Press, Ann Arbor 1958.
- [4] R. Świtka, Aproksymowana półprzestrzeń sprężysta jako model podłoża sprężystego, Rozprawy Politechniki Poznańskiej 31 (1968) Poznań.
- [5] Y. Zhang, Y. Liu, P. Chen, K.D. Murphy, *Buckling loads and eigenfrequencies of a braced beam resting on an elastic foundation*, Acta Mech. Solida Sin. 24(6) (2011) 510-518.
- [6] N. Challamel, On the post-buckling of elastic beams on gradient foundation, C. R. Mec. 339 (2011) 396-405.
- [7] A. Fallah, M.M. Aghdam, *Thermo-mechanical buckling and nonlinear free vibration analysis of functionally graded beams on nonlinear elastic foundation*, Compos. Part B-eng. 43 (2012) 1523-1530.
- [8] S.Y. Hung, J.S. Chen, Snapping of a buckled beam on elastic foundation under a midpoint force, Eur. J. Mech. A-Solid. 31 (2012) 90-100.
- [9] M.H. Yas, N. Samadi, *Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation*, Int. J. Pres. Ves. Pip. 98 (2012) 119-128.
- [10] H. Yaghoobi, M. Torabi, Post-buckling and nonlinear free vibration analysis of geometrically imperfect functionally graded beams resting on nonlinear elastic foundation, Appl. Math. Modell. 37 (2013) 8324-8340.
- [11] S.E. Ghiasian, Y. Kiani, M.R. Eslami, *Dynamic buckling of suddenly heated or compressed FGM beams resting on nonlinear elastic foundation*, Compos. Struct. 106 (2013) 225-234.
- [12] Y. Zhang, K.D. Murphy, *Jumping instabilities in the post-buckling of a beam on a partial nonlinear foundation*, Acta Mech. Solida Sin. 26(5) (2013) 500-513.
- [13] N. Wattanasakulpong, V. Ungbhakorn, Analytical solutions for bending, buckling and vibration responses of carbon nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundation, Comp. Mater. Sci. 71 (2013) 201-208.
- [14] H. Niknam, M.M. Aghdam, A semi analytical approach for large amplitude free vibration and buckling of nonlocal FG beams resting on elastic foundation, Compos. Struct. 119 (2015) 452-462.
- [15] Z.M. Li, P. Qiao, Thermal postbuckling analysis of anisotropic laminated beams with different boundary conditions resting on two-parameter elastic foundation, Eur. J. Mech. A-Solid. 54 (2015) 30-43.
- [16] D.V. Griffiths, G. Bee, Analytical and numerical observations on the Hetenyi solution for buckling of beams on elastic foundations, ASCE 141(1) (2015) 1-5.

- [17] H. Zhang, C.M. Wang, E. Ruocco, N. Challamel, Hencky bar-chain model for buckling and vibration analyses of non uniform beams on variable elastic foundation, Eng. Struct. 126 (2016) 252-263.
- [18] A.R. Mojdehi, B. Tavakol, W. Royston, D.A. Dillard, D.P. Holmes, *Buckling of elastic beams embedded in granular media*, Extreme Mech. Lett. 9 (2016) 237-244.
- [19] H. Deng, K. Chen, W. Cheng, S. Zhao, Vibration and buckling analysis of double-functionally graded Timoshenko beam system on Winkler-Pasternak elastic foundation, Compos. Struct. 160 (2017) 152-168.
- [20] C. Kameswara Rao, L. Bhaskara Rao, Torsional post-buckling of thin-walled open section clamped beam supported on Winkler-Pasternak foundation, Thin Wall. Struct. 116 (2017) 320-325.
- [21] M.T.A. Robinson, S. Adali, *Buckling of nonuniform and axially functionally graded nonlocal Timoshenko nanobeams on Winkler-Pasternak foundation*, Compos. Struct. 206 (2018) 95-103.
- [22] D. Froio, E. Rizzi, F.M.F. Simões, A.P. Da Costa, Universal analytical solution of the steadystate response of an infinite beam on a Pasternak elastic foundation under moving load, Int. J. Solids Struct. 132-133 (2018) 245-263.
- [23] T.M. Wang, W.F. Brannen, *Natural frequencies for out-of-plane vibrations of curved beams* on elastic foundations, J. Sound Vib. 84(2) (1982) 241-246.
- [24] F.F. Çalim, Dynamic analysis of beams on viscoelastic foundation, Eur. J. Mech. A-Solid. 28 (2009) 469-476.
- [25] F.F. Çalim, F.G. Akkurt, *Static and free vibration analysis of straight and circular beams on elastic foundation*, Mech. Res. Commun. 38 (2011) 89-94.
- [26] S.E. Motaghian, M. Mofid, P. Alanjari, *Exact solution to free vibration of beams partially supported by an elastic foundation*, Sci. Iran. Trans. A. 18(4) (2011) 861-866.
- [27] F.F. Çalim, Forced vibration of curved beams on two-parameter elastic foundation, Appl. Math. Modell. 36 (2012) 964-973.
- [28] J.K. Lee, S. Jeong, J. Lee, Natural frequencies for flexural and torsional vibrations of beams on Pasternak foundation, Soils Found. 54(6) (2014) 1202-1211.
- [29] A.S. Kanani, H. Niknam, A.R. Ohadi, M.M. Aghdam, Effect of nonlinear elastic foundation on large amplitude free and forced vibration of functionally graded beam, Compos. Struct. 115 (2014) 60-68.
- [30] V. Stojanović, *Geometrically nonlinear vibrations of beams supported by a nonlinear elastic foundation with variable discontinuity*, Commun. Nonlinear Sci. 28 (2015) 66-80.
- [31] H. Norouzi, D. Younesian, *Chaotic vibrations of beams on nonlinear elastic foundations subjected to reciprocating loads*, Mech. Res. Commun. 69 (2015) 121-128.
- [32] W. Szcześniak, M. Ataman, Drgania belki Eulera na inercyjnym podłożu Własowa-Leontiewa pod wpływem impulsu siły, Efektywność transportu 12 (2016) 727-732.

- [33] A. Mirzabeigy, R. Madoliat, *Large amplitude free vibration of axially loaded beams resting on variable elastic foundation*, Alexandria Engineering Journal 55 (2016) 1107-1114.
- [34] F.F. Çalim, *Free and forced vibration analysis of axially functionally graded Timoshenko beams on two-parameter viscoelastic foundation*, Composites Part B-eng. 103 (2016) 98-112.
- [35] Y. Miao, Y. Shi, G. Wang, Y. Zhong, *Closed-form solution of beam on Pasternak foundation under inclined dynamic load*, Acta Mech. Solida Sin. 30 (2017) 596-607.
- [36] Y. Miao, Y. Shi, H. Luo, R. Gao, Closed-form solution considering the tangential effect under harmonic line load for an infinite Euler-Bernoulli beam on elastic foundation, Appl. Math. Modell. 54 (2018) 21-33.
- [37] H. Lobar, A. Mitra, S. Sahoo, Large amplitude forced vibration analysis of an axially functionally graded tapered beam resting on elastic foundation, Mater. Today-Proc. 5 (2018) 5303-5312.
- [38] D. Froio, E. Rizzi, F.M.F. Simões, A.P. Da Costa, *Critical velocities of a beam on nonlinear elastic foundation under harmonic moving load*, Procedia Engineer. 199 (2017) 2585-2590.
- [39] N. Mohamed, M.A. Eltaher, S.A. Mohamed, L.F. Seddek, Numerical analysis of nonlinear free and forced vibrations of buckled curved beams resting on nonlinear elastic foundations, Int. J. Nonlin. Mech. 101 (2018) 157-173.
- [40] N.D. Beskou, E.V. Muho, *Dynamic response of a finite beam resting on a Winkler foundation* to a load moving on its surface with variable speed, Soil Dyn. Earthq. Eng. 109 (2018) 222-226.
- [41] E.V. Muho, N.D. Beskou, Dynamic response of an infinite beam resting on a Winkler foundation to a load moving on its surface with variable speed, Soil Dyn. Earthq. Eng. 109 (2018) 2150-153.
- [42] C. Rodrigues, F.M.F. Simões, A. Pinto da Costa, D. Froio, E. Rizzi, *Finite element dynamic analysis of beams on nonlinear elastic foundations under a moving oscillator*, Eur. J. Mech. A-Solid. 68 (2018) 9-24.
- [43] I.E. Avramidis, K. Morfidis, *Bending of beams on three-parameter elastic foundation*, Int. J. Solids Struct. 43 (2006) 357-375.
- [44] M. Sato, S. Kanie, T. Mikami, Mathematical analogy of a beam on elastic supports as a beam on elastic foundation, Appl. Math. Modell. 32 (2008) 688-699.
- [45] J. Ying, C.F. Lu, W.Q. Chen, *Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations*, Compos. Struct. 84 (2008) 209-219.
- [46] X. Ma, J.W. Butterworth, G.C. Clifton, Response of an infinite beam resting on a tensionless elastic foundation subjected to arbitrarily complex transverse loads, Mech. Res. Commun. 36 (2009) 818-825.
- [47] L. Borák, P. Marcián, Beam on elastic foundation using modified Betti's theorem, Int. J. Mech. Sci. 88 (2014) 17-24.

- [48] T.P. Nguyen, D.T. Pham, P.H. Hoang, *A new foundation model for dynamic analysis of beams* on nonlinear foundation subjected to a moving mass, Procedia Engineer. 142 (2016) 166-173.
- [49] M. Aslami, P.A. Akimov, Analytical solution for beams with multipoint boundary conditions on two-parameter elastic foundations, ACME 16 (2016) 668-677.
- [50] Y. Zhang, X. Liu, Y. Wei, Response of an infinite beam on a bilinear elastic foundation: Bridging the gap between the Winkler and tensionless foundation models, Eur. J. Mech. A-Solid. 71 (2018) 394-403.
- [51] R. Grzejda, Modelowanie normalnych charakterystyk sztywnościowych nieliniowego podłoża sprężystego, Modelowanie Inżynierskie 16(47) (2013) 87-92.
- [52] B. Kaleta, B. Różycki, Drgania własne belki na stochastycznym dwuwarstwowym podłożu o znacznie różniących się grubościach, Budownictwo i Architektura 13(2) (2014) 215-222.
- [53] G.P. Lignola, F.R. Spena, A. Prota, G. Manfredi, Exact stiffness-matrix of two nodes Timoshenko beam on elastic medium. An analogy with Eringen model of nonlocal Euler-Bernoulli nanobeams, Comput. Struct. 182 (2017) 556-572.
- [54] N.F. Morozov, P.E. Tovstik, On modes of buckling for a plate on an elastic foundation, Mech. Sol. 45(4) (2010) 519-528.
- [55] M. Ataman, W. Szcześniak, Analiza ugięć płyty sprężystej Kirchhoffa spoczywającej na inercyjnym podłożu Własowa pod impulsem siły, Efektywność transportu 12 (2016) 537-540.
- [56] B. Mukherjee, D.A. Dillard, On buckling of a thin plate on an elastomeric foundation, Int. J. Mech. Sci. 149 (2017) 429-435.
- [57] K. Marguerre, The optimum buckling load of a flexibly supported plate composed of two sheets joined by a light weight filler when under longitudinal compression, Deutsche Viertaljahrsschrift für Literaturwissenschaft und Giests Geschichte. D.V.L (ZWB UM1360/2), Oct 28 (1944).
- [58] N.J. Hoff, *Bending and buckling of rectangular sandwich plates*, NACA Tech Note 2225, Nov. (1950).
- [59] W. Flugge, *Determination of optimum dimensions of sandwich panels*, La Recherche Aeronautique, No 7, Jan/Feb. (1949).
- [60] W. Flugge, *The optimum problem of the sandwich plate*, J. Appl. Mech. 19(1) (1952) 104-108.
- [61] C. Libove, S.B. Butdorf, *A general small-deflection theory for flat sandwich plates*, NACA TN 1526 (1948).
- [62] E. Reissner, *Finite deflections of sandwich plates*, Journal of the Aeronautical Science 15(7) (1948) 435-440.
- [63] F.J. Plantema, Sandwich construction: *The bending and buckling of sandwich beams, plates and shells*, New York: John Wiley and Sons (1966).
- [64] H.G. Allen, Analysis and design of structural sandwich panels, London: Pergamon Press (1969).

- [65] A.S. Volmir, Ustoichivost deformiruemnykh system, Izdatielstwo Nauka, Moscow (1967).
- [66] M. Kruś, P. Kuligowski, *Modelowanie własności mechanicznych lekkich struktur wielowarstwowych*, Pojazdy Szynowe 3 (2012) 50-53.
- [67] K. Magnucki, P. Jasion, M. Kruś, P. Kuligowski, L. Wittenbeck, *Strength and buckling of sandwich beams with corrugated core*, JTAM 51(1) (2013) 15-24.
- [68] P.P. Bijlaard, Analysis of elastic and plastic stability of sandwich plates by the method of split rigidities, J. Aeronaut. Sci. 1-3 (1951, 1952).
- [69] P.P. Bijlaard, On the optimum distribution of material in sandwich plates loaded in their plane, Proc of 1st US Congress of Appl. Mech., ASME, New York (1952) 373-380.
- [70] A.C. Eringen, *Bending and buckling of rectangular sandwich plates*, Proc of 1st US Congress of Appl. Mech. ASME, New York (1952) 381-390.
- [71] H.W. March, *Behavior of a rectangular sandwich panel under uniform lateral load and a compressive edge load*, Forest Products Lab Report 1834 (1952).
- [72] W.S. Ericksen, Effects of shear deformation in the core of a flat rectangular sandwich panel:
 1, Buckling under compressive end load; 2, Deflection under uniform transverse load, Forest
 Products Lab Report 1583 (1955).
- [73] M.E. Raville, *Deflection and stresses in a uniformly loaded simply supported, rectangular sandwich plate*, Forest Products Lab Report 1847 (1955).
- [74] G. Gerard, Minimum Weight Analysis of Compressive Structures, New York Univ Press, New York (1956).
- [75] L.E. Kaechele, Minimum weight design of sandwich panels, USAF Project Rand Research Memorandum, RM 1895, AD-133011 (1957).
- [76] S. Cheng, *On the theory of bending of sandwich plates*, Proc of 4th US Natl Congress of Applied Mechanics, ASME, New York (1962).
- [77] W.G. Heath, Sandwich construction, Part 1: The strength of flat sandwich panels, Aircraft Eng. (1960) 186-191.
- [78] W.G. Heath, Sandwich construction, Part 2: The optimum design of flat sandwich panels, Aircraft Eng. 32 (1960) 230-235.
- [79] F.J. Plantema, Sandwich Construction: The Bending and Buckling of Sandwich Beams, Plates and Shells, John Wiley and Sons, New York (1966).
- [80] H.G. Allen, Analysis and design of structural sandwich panels, Pergamon Press, Oxford (1969).
- [81] J.R. Vinson, S. Shore, *Bibliography on methods of structural optimization for flat sandwich panels*, Naval Air Engineering Center Report NAEC-ASC-1082, April 15 (1965).
- [82] J.R. Vinson, S. Shore, Methods of structural optimization for flat sandwich panels, Naval Air Engineering Center Report NAECASC-1083, April 15 (1965).
- [83] J.R. Vinson, S. Shore, Design procedures for the structural optimization of flat sandwich panels, Naval Air Engineering Center Report NAEC-ASC-1084, April 15 (1965).

- [84] J.R. Vinson, S. Shore, Structural optimization of corrugated and web core sandwich panels subjected to uniaxial compression, Naval Air Engineering Center Report NAEC-ASC 1109, May (1967).
- [85] J.R. Vinson, S. Shore, Structural optimization of flat corrugated core sandwich panels under in plane shear loads and combined uniaxial compression and in-plane shear loads, Naval Air Engineering Center Report NAEC-ASC-1110, July (1967).
- [86] T.T. McCoy, J.R. Vinson, S. Shore, A method for weight optimization of flat truss core sandwich panels under lateral loads, Naval Air Engineering Center Report NAEC-ASC. 1111, July 1 (1967).
- [87] L. Léotoing, S. Drapier, A. Vautrin, *First applications of a novel unified model for global and local buckling of sandwich columns*, Eur. J. Mech. A-Solid. 21 (2002) 683-701.
- [88] B.K. Hadi, 2001, Wrinkling of sandwich column: comparison between finite element analysis and analytical solutions, Compos. Struct. 53 (2001) 477-482.
- [89] R. Nogowczyk, Zastosowanie programowania symbolicznego do analizy stateczności i drgań struktur sandwiczowych, Rozprawa doktorska, Politechnika Krakowska (2009).
- [90] J. Godzimirski, A. Pietras, *Badania hybrydowych kompozytów warstwowych typu FML (fibre metal laminate)*, Technologia i Automatyzacja Montażu 2 (2012) 52-56.
- [91] L.L. Yan, B. Han, B. Yu, C.Q. Chen, Q.C. Zhang, T.J. Lu, *Three-point bending of sandwich beams with aluminum foam-filled corrugated cores*, Mater. Design 60 (2014) 510-519.
- [92] B. Han, K.K. Qin, B. Yu, Q.C. Zhang, C.Q. Chen, T.J. Lu, *Design optimization of foam*reinforced corrugated sandwich beams, Compos. Struct. 130 (2015) 51-62.
- [93] I.M. Daniel, *The influence of core properties on failure of composites sandwich beams*, 8th International Conference on Sandwich Structures. Porto, Portugal (2008).
- [94] E. Göde, Savaş uçaklarında yapısal malzeme olarak kullanılan sandviç kompozitlerin hasar tespiti ve onarımının incelenmesi, Eskiehir Osmangazi Universitesi Thesis of MS (2007).
- [95] A. Siriruk, D. Penumadu, Y.J. Weitsman, *Effect of sea water on mechanical properties of polymeric foam and sandwich composites*, 8th International Conference on Sandwich Structures, Porto, Portugal, 6-8 may (2008).
- [96] J. Jakobsen, J.H. Andreasen, O.T. Thomsen, E. Bozhevolnaya, Fracture mechanics modelling and experimental measurements of crack kinking at sandwich core-core interfaces, 8th International Conference on Sandwich Structures, 6-8 may 2008, Porto, Portugal.
- [97] M.F. Ashby, A.L. Greer, Scr. Mater. 54 (2006) 321-326.
- [98] J.R. Greer, J.T.M. De Hosson, Prog. Mater Sci. 56 (2011) 654-724.
- [99] D.C. Jang, J.R. Greer, Nat. Mater. 9 (2010) 215-219.
- [100] W. Klement, R.H. Willens, P. Duwez, Nature 187 (1960) 869-870.
- [101] Z.D. Sha, L.C. He, Q.X. Pei, Z.S. Liu, Y.W. Zhang, T.J. Wang, *The mechanical properties* of a nanoglass/metallic glass/nanoglass sandwich structure, Scripta Materialia (2014) 37-40.

- [102] Q.M. Zhang, H.F. Li, M. Poh, H.S. Xu, Z.Y. Cheng, F. Xia, *An all-organic composite actuator material with a highdielectric constant*, Nature 419 (2002) 284-287.
- [103] C.G. Naber, C. Tanase, P.W.M. Blom, G.H. Gelinck, A.W. Marsman, F.J. Touwslager, S. Setayesh, D.M. de Leeuw, *High-performance solution-processed polymer ferroelectric fieldeffect transistors*, Nat. Mater. 4 (2005) 243-248.
- [104] J. Wu, C.W. Nan, Y. Lin, Y. Deng, Giant dielectric permittivity observed in Li and Ti doped NiO, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 217601.
- [105] S. Chockalingam, H.K. Traver, *Microwave sintering of* β -SiAlON–ZrO₂ composites, Mater. Design 31 (2010) 3641-3646.
- [106] S. Hashimoto, T. Umeda, K. Hirao, N. Kondo, Y. Zhou, H. Hyuga, S. Honda, Y. Iwamoto, *Fabrication and characterization of porous ZrO2 with a high volume fraction of fine closed pores*, J. Eur. Ceram. Soc. 33(1) (2013) 61-66.
- [107] X.X. Liu, C.L. Martin, D. Bouvard, S.D. Iorio, J. Laurencin, G. Delette, *Strength of highly porous ceramic electrodes*, J. Am. Ceram. Soc. 94(10) (2011) 3500-3508.
- [108] M. Altenaiji, Z.W. Guan, W.J. Cantwell, Y. Zhao, G.K. Schleyer, *Characterisation of aluminium matrix syntactic foams under drop weight impact*, Mater. Design 59 (2014) 296-302.
- [109] M. Taherishargh, I.V. Belova, G.E. Murch, T. Fiedler, *On the mechanical properties of heat-treated expanded perlite aluminium syntactic foam*, Mater. Des. 63 (2014) 375-383.
- [110] M. Yazici, J. Wright, D. Bertin, A. Shukla, Experimental and numerical study of foam filled corrugated core steel sandwich structures subjected to blast loading, Compos. Struct. 110 (2014) 98-109.
- [111] S. Haldar, H.A. Bruck, Mechanics of composite sandwich structures with bioinspired core, Compos. Sci. Technol. 95 (2014) 67-74.
- [112] B. Wang, G. Zhang, Q. He, L. Ma, L. Wu, J. Feng, Mechanical behavior of carbon fiber reinforced polymer composite sandwich panels with 2-D lattice truss cores, Mater. Design 55 (2014) 591-596.
- [113] S.K. Bapanapalli, O.M. Martinez, C. Gogu, B.V. Sankar, R.T. Haftka, Analysis and design of corrugated-core Sandwich panels for thermal protection systems of space vehicles, In: 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics, and materials conference, 1-4 May, Newport, Rhode Island, USA (2006).
- [114] J.J. Rimoli, B. Talamini, J.J. Wetzel, K.P. Dharmasena, R. Radovitzky, H.N.G. Wadley, Wet-sand impulse loading of metallic plates and corrugated core sandwich panels, Int. J. Impact Eng. 38(10) (2011) 837-848.
- [115] M.R.M. Rejab, W.J. Cantwell, *The mechanical behaviour of corrugated-core sandwich panels*, Compos. Part B-eng. 47 (2013) 267-277.

- [116] L. He, Y.S. Cheng, J. Liu, *Precise bending stress analysis of corrugated-core, honeycomb-core and X-core sandwich panels*, Comp. Struct. 94 (2012) 1656-1668.
- [117] K. Wei, R. He, X. Cheng, R. Zhang, Y. Pei, D. Fang, *Fabrication and mechanical properties* of lightweight ZrO₂ ceramic corrugated core sandwich panels, Mater. Design 64 (2014) 91-95.
- [118] K. Niklas, Zastosowanie naprężeń lokalnych do oceny trwałości zmęczeniowej spoin laserowych złączu teowym paneli stalowych typu sandwich, rozprawa doktorska, Wydział Oceanotechniki i Okrętnictwa, Politechnika Gdańska (2013).
- [119] K. Magnucki, M. Ostwald, Stateczność i optymalizacja konstrukcji trójwarstwowych, Poznań -Zielona Góra (2001).
- [120] G.A. Kardomateas, *Effect of an elastic foundation on the buckling and post buckling of delaminated composites under compressive loads*, J. Appl. Mech. 55(1) (1988) 238-241.
- [121] F. Avilés, L.A. Carlsson, *Elastic foundation analysis of local face buckling in debonded sandwich columns*, Mech. Mater. 37 (2005) 1026-1034.
- [122] H.S. Shen, Z.H. Zhu, Postbuckling of sandwich plates with nanotube-reinforced composite face sheets resting on elastic foundations, EJSM 35 (2012) 10-21.
- [123] M. Sobhy, Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions, Compos. Struct. 99 (2013) 76-87.
- [124] M. Taczała, R. Buczkowski, M. Kleiber, Postbuckling analysis of functionally graded plates on an elastic foundation, Compos. Struct. 132 (2015) 842-847.
- [125] M. Pradhan, P.R. Dash, Stability of an asymmetric tapered sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to a pulsating axial load with thermal gradient, Compos. Struct. 140 (2016) 816-834.
- [126] P. Tossapanon, N. Wattanasakulpong, Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation, Compos. Struct. 142 (2016) 215-225.
- [127] V.D. Kubenko, Y.M. Pleskachevskii, É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, *Natural vibration* of a sandwich beam on an elastic foundation, IAM, 42(5) (2006) 541-547.
- [128] J.R. Banerjee, C.W. Cheung, R. Morishima, M. Perera, J. Njuguna, Free vibration of a threelayered sandwich beam using the dynamic stiffness method and experiment, Int. J. Solids Struct. 44 (2007) 7543-7563.
- [129] S.C. Pradhan, T. Murmu, Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method, J. Sound Vib. 321(1-2) (2009) 342-362.
- [130] S.C. Mohanty, R.R. Dash, T. Rout, Parametric instability of a functionally graded Timoshenko beam on Winkler's elastic foundation, Nucl. Eng. Des. 241(8) (2011) 2689-2715.
- [131] R. Tabassian, J. Rezaeepazhand, *Dynamic stability of smart sandwich beams with electrorheological core resting on elastic foundation*, J. Sandw. Struct. Mater. 15(1) (2012) 25-44.

- [132] E. Demir, H. Çallioğlu, M. Sayer, Vibration analysis of sandwich beams with variable cross section on variable Winkler elastic foundation, SECM 20(4) (2013) 359-370.
- [133] H. Saidi, W. AddaBedia, A. Fekrar, F. Ismail Salman, A. Tounsi, Free vibration analysis of non-symmetric FGM sandwich square plate resting on elastic foundations, International Conference on Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis CSNDD 2014, MATEC Web of Conferences (16) (2014).
- [134] M. Pradhan, M.K. Mishra, P.R. Dash, *Free vibration analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation*, Procedia Engineer. 144 (2016) 116-123.
- [135] P. Tossapanon, N. Wattanasakulpong, Flexural vibration analysis of functionally graded sandwich plates resting on elastic foundation with arbitrary boundary conditions: Chebyshev collocation technique, J. Sandw. Struct. Mater. 22(2) (2020) 156-189.
- [136] K. Gao, W. Gao, D. Wu, C. Song, Nonlinear dynamic characteristics and stability of composite orthotropic plate on elastic foundation under thermal environment, Compos. Struct. 168 (2017) 619-632.
- [137] A.V. Yarovaya, *Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation*, IAM 42(2) (2006) 206-213.
- [138] A.M. Zenkour, M.N.M. Allam, M. Sobhy, Bending analysis of FG viscoelastic sandwich beams with elastic cores resting on Pasternak's elastic foundations, Acta Mech. 212(3-4) (2010) 233-252.
- [139] M. Afshin, F. Taheri-Behrooz, *Interlaminar stresses of laminated composite beams resting* on elastic foundation subjected to transverse loading, Comp. Mater. Sci. 96 (2015) 439-447.
- [140] C. Zhang, J. Wang, *Delamination of layered structures on elastic foundation*, Eng. Fract. Mech. 78 (2011) 1055-1066.
- [141] A.M. Zenkour, A.F. Radwan, Compressive study of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak foundations under various boundary conditions using hyperbolic shear deformation theory, Arch. Civ. Mech. Eng. 18 (2018) 645-658.
- [142] A.M. Zenkour, M. Sobhy, *Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates*, Compos. Struct. 93 (2010) 93-102.
- [143] A.R. Setoodeh, M. Ghorbanzadeh, P. Malekzadeh, A two-dimensional free vibration analysis of functionally graded sandwich beams under thermal environment, J. Mech. Eng. Sci. 226(12) (2012) 2860-2873.
- [144] Y. Kiani, E. Bagherizadeh, M.R. Eslami, *Thermal and mechanical buckling of sandwich plates with FGM face sheets resting on the Pasternak elastic foundation*, J. Mech. Eng. Sci. 226(1) (2012) 32-41.
- [145] Y. Chen, Y. Fu, J. Zhong, C. Tao, Nonlinear dynamic responses of fiber-metal laminated beam subjected to moving harmonic loads resting on tensionless elastic foundation, Compos. Part Beng. 131 (2017) 253-259.

[146] I. Wstawska, K. Magnucki, P. Kędzia, Approximate estimation of stability of homogeneous beam on elastic foundation, Eng. Trans. 67(3) (2019) 429-440.