Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki
Instytut Automatyki i Robotyki

Rozprawa doktorska

Metoda sterowania suboptymalnego z wykorzystaniem linearyzacji układu zamkniętego

mgr inż. Paulina Superczyńska

Promotor:
dr hab. inż. Sławomir Jan Stępień

Poznań, wrzesień 2019

Streszczenie

Rozprawa doktorska dotyczy zakresu sterowania optymalnego oraz suboptymalnego dla obiektów nieliniowych. Zawarto w niej szczegółowy opis metody sterowania z regulatorem liniowo kwadratowym (*ang. Linear Quadratic Regulator- LQR*), na której opiera się metoda będąca głównym przedmiotem pracy, wykorzystująca nieliniowy kompensator SDRE (*ang. State Dependent Riccati Equation*). Praca zawiera analizę klasycznej metody wykorzystującej SDRE zarówno dla skończonego, jak i nieskończonego horyzontu czasowego, proponuje parametryzację nieliniowych modeli do postaci SDC (*State Dependent Coefficient Form*) oraz przedstawia zastosowanie w symulacjach.

Jako nowy wkład, autorka proponuje skuteczny algorytm syntezy nieliniowego systemu ze sterowaniem w sprzężeniu zwrotnym, zapewniając jednocześnie dużą elastyczność projektowania sterowania dzięki macierzom zależnym od stanu. Wprowadzając modyfikacje w macierzy kompensatora, uzyskano nowe prawa sterowania dla proponowanych metod, zarówno dla skończonego, jak i nieskończonego horyzontu czasowego. Proponowane metody pozwalają uprościć obliczenia wynikające ze znalezienia rozwiązania zależnego od stanu algebraicznego równania Riccatiego (*ang. State Dependent Algebraic Riccati Equation- SDARE*) oraz różniczkowego, zależnego od stanu równania Riccati'ego (*State Dependent Differential Riccati Equation-SDDRE*). Dowiedziono, że w przypadku nieskończonego horyzontu czasowego, możliwe jest rozwiązanie równania Riccatiego tylko raz w całym procesie sterowania. Natomiast w przypadku ze skończonym horyzontem czasowym równanie Riccatiego obliczane jest jedynie dla czasowo zależnych wzmocnień kompensatora w sprzężeniu zwrotnym – tak jak w zagadnieniach sterowania optymalnego LQR. Dokonano analizy i opracowano dowody stabilności dla proponowanego podejścia. Prezentowane metody zaimplementowano oraz poddano analizie symulacyjnej na wybranych modelach obiektów rzeczywistych (zarówno nieliniowych nieafinicznych, jak i afinicznych), wyniki potwierdziły poprawność działania oraz znaczące skrócenie czasu obliczeń.

Abstract

The doctoral dissertation concerns of the optimal and the suboptimal cotrol problem for non-linear plants. Detailed description of the Linear-Quadratic Regulator (LQR) control method was presented as well as the method that is an extension of the LQR metod- State Dependent Riccati Equation approach with non-linear compensator. An analysis of the classical metod using SDRE, for both finite and infinite time horizons is contained and the parametrization of non-linear models to the State Dependent Coefficient Form (SDC) is proposed and presented in simulations.

As a new contribution, the author proposed an effective algorithm for the synthesis of a non-linear closed- loop system providing high flexibility in the design of a control using state-dependent weight matrices. A new control laws have been obtained thanks to modifications of the compensation matrix for respectively finite and infinite time horizons. The proposed methods allowe one to simplify computations to solve State-Dependent Algebraic Riccati Equation (SDARE) and State-Dependent Differential Riccati Equation (SDDRE). It has been proven that in the case of an infinite time horizon, the Riccati equation can be solved only once in the entire control process. However, in the case of a finite time horizon, the Riccati equation is calculated only for the time-dependent gain of the compensator closed-loop system - as in the case of optimal LQR control problem. The stability analysis was performed and evidenced for the proposed approach. The implementation and simulations on selected models were presented (for non-linear non-affine and affine systems). The results confirmed the correctness of computations and a significant reduction of the computations time.

Spis treści

Streszczenie **1**

1 Wstęp **3**

2 Cel i zakres pracy **7**

3 Modele dynamiczne układów nieliniowych **10**
3.1 Modele w przestrzeni stanów 10
3.2 Modele sparametryzowane 12

4 Regulacja LQR i SDRE **16**
4.1 Klasyczna metoda sterowania liniowo kwadratowego LQR 16
4.1.1 Sterowanie LQR ze skończonym horyzontem czasowym 17
4.1.2 Sterowanie LQR z nieskończonym horyzontem czasowym 19
4.2 Klasyczna metoda sterowania SDRE dla układów nieliniowych 22
4.2.1 Klasyczna metoda SDRE ze skończonym horyzontem czasowym 22
4.2.2 Klasyczna metoda SDRE z nieskończonym horyzontem czasowym 25

5 Istnienie i jednoznaczność rozwiązania **29**
5.1 Mnożniki Lagrange'a 29
5.2 Równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana, rozmaitość Lagrange'a i rozwiązanie lepkościowe 31
5.3 Istnienie sterowania stabilizującego SDRE ze sprzężeniem zwrotnym 35

6 Propozycja nowej metody SDRE **37**
6.1 Nowa metoda sterowania SDRE dla układów nieliniowych ze skończonym horyzontem czasowym 38
6.2 Nowa metoda sterowania SDRE dla układów nieliniowych z nieskończonym horyzontem czasowym 46

7 Analiza stabilności proponowanej metody SDRE **53**
7.1 Stabilność lokalna asymptotyczna 53
7.1.1 Proponowana metoda SDRE ze skończonym horyzontem czasowym 53
7.1.2 Proponowana metoda SDRE z nieskończonym horyzontem czasowym 54
7.2 Stabilność globalna 57
7.2.1 Proponowana metoda SDRE ze skończonym horyzontem czasowym 57
7.2.2 Proponowana metoda SDRE z nieskończonym horyzontem czasowym 59

8 Metody rozwiązywania równań Riccatiego **61**
8.1 Rozkład w szereg Taylora 61
8.2 Metoda interpolacji 63
8.3 Algorytm Newtona 65
8.4 Algorytm Newtona z kierunkowym poszukiwaniem minimum funkcji 66
8.5 Algorytm Kleinmana 66
8.6 Dekompozycja Schura 67

9 Zastosowania metody SDRE w sterowaniu wybranych układów **69**
9.1 Wyniki obliczeniowe i symulacja 71
9.1.1 Sterowanie silnikiem krokowym 72
9.1.2 Sterowanie quadrotorem 78
9.1.3 Sterowanie oscylatorem Van der Pola 87
9.1.4 Sterowanie aktuatorem liniowym 90
9.1.5 Sterowanie robotem mobilnym 95
9.1.6 Sterowanie manipulatorem 105

10 Podsumowanie i wnioski **111**

Bibliografia **113**

Rozdział 1

Wstęp

Pierwsze prace związane z metodą sterowania optymalnego układami nieliniowymi pojawiły się w latach pięćdziesiątych ubiegłego wieku [1–3]. Problem sterowania optymalnego polega na znalezieniu takiego sterowania dopuszczalnego, które zapewni minimum przyjętego wskaźnika jakości przy ograniczeniach na dynamikę obiektu sterowania. Można zatem powiedzieć, że problem sterowania optymalnego polega nie tylko na zapewnieniu stabilnego rozwiązania, uzyskaniu określonej szerokości pasma roboczego czy spełnieniu konkretnych wymagań wywodzących się z klasycznych metod sterowania, ale ma zapewniać możliwie najlepsze sterowanie systemem konkretnego typu.

Klasyczne metody sterowania opracowane zostały dla układów liniowych. W takim przypadku przyjmuje się, że zarówno obiekt sterowania, jak i sterownik są liniowe, a syntezę sterownika prowadzi się na podstawie kwadratowych wskaźników jakości, które w wyrażeniu podcałkowym definiują energię dostarczoną do obiektu oraz energię traconą. Metody pozwalające kształtować przebieg sterowania to metody liniowo kwadratowe (*ang. Linear- Quadratic LQ*). Są one łatwo adaptowalne do danego systemu i pozwalają na prostą implementację [4, 5]. Jednak z uwagi na wrażliwość na zmiany parametrów, zakłócenia zewnętrzne, metody te mogą nie zapewniać oczekiwanej jakości sterowania (np. szybkiej odpowiedzi przejściowej, zerowania błędu stanu ustalonego i odporności). Radząc sobie z tymi ograniczeniami sterowania liniowo optymalnego, zaczęto zwracać uwagę na różne nieliniowe metody, jak np. sterowanie adaptacyjne [6–8], ślizgowe [9], kaskadowe [10], sterowanie tolerujące uszkodzenia [11], sterowanie krzepkie [12], rozmyte [13], inteligentne [14] oraz predykcyjne [15].

Próby poprawy jakości projektowanego układu sterowania dla systemu rzeczywistego wymagają określenia miary jakości w celu optymalizacji. W tym kontekście warto zwrócić uwagę na problem zapewnienia wydajności systemu, tak aby spełnić warunki brzegowe z rygorystyczną precyzją, czy w przypadku problemów inżynieryjnych, aby minimalizować funkcje kosztu, uzyskując akceptowalną jakość sterowania. Jeśli w modelu matematycznym założono, że obiekt jest liniowy, wówczas opracowanie, implementacja i rozwiązanie problemu sterowania nie jest trudne, gdyż dostępna jest literatura dotycząca zarówno teoretycznych, jak i praktycznych opisów problemu. Jednak spory problem pojawia się, gdy zagadnienia zaczynają dotyczyć dynamiki nieliniowej [16].

Współcześnie nie ma jednej wspólnej metody rozwiązania problemu sterowania, która będzie dostosowana do wszystkich typów nieliniowości, a także nieznanych zakłóceń. Sterowanie optymalne zapewnia jednak zestaw ogólnych narzędzi, które mogą prowadzić do efektywnego rozwiązania problemu sterowania zarówno w ciągłej, jak i dyskretnej dziedzinie czasu w otwartej pętli, a także w sprzężeniu zwrotnym. W celu uzyskania optymalnego rozwiązania w otwartej pętli, bazując na klasycznym podejściu rachunku różniczkowego [17], warunki konieczne przekształcają problem sterowania optymalnego w dwupunktowy problem wartości granicznej, który można rozwiązać korzystając z technik iteracyjnych [18]. Podejście to wymaga rozsądnych wstępnych przypuszczeń odnośnie możliwego rozwiązania, które następnie jest dalej sprawdzane w kontekście warunków drugiego rzędu, aby nadal było optymalne. Poza tym kombinacja sterowania w zamkniętej i otwartej pętli sprzężenia zwrotnego daje powszechnie wykorzystywane sterowanie predykcyjne.

Inne teoretyczne podejście polega na programowaniu dynamicznym. W kontekście problemu sterowania optymalnego, opiera się ono na sformułowaniu równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana, które jest skalarnym nieliniowym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu. Rozwiązanie tego równania jest optymalne, jednakże tylko w nielicznych przypadkach, nawet dla systemów małowymiarowych, możliwe jest uzyskanie jawnej formuły analitycznej. Stąd korzysta się z metod numerycznych, które pozwalają na uzyskanie rozwiązań przybliżonych [19]. Złożoność rozwiązań numerycznych zależy od stopnia nieliniowości układów i ze względu na kłopoty związane z przybliżaniem rozwiązania, rozważania skupiają się głównie na nieskończonym horyzoncie czasowym.

Godnym uwagi, a zarazem głównym zagadnieniem tej pracy jest podejście wykorzystujące zależne od stanu równanie Riccatiego (*ang. State-Dependent Riccati Equation- SDRE*) do uzyskania suboptymalnego prawa

sterowania w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego. Jest to stosunkowo nowy i skuteczny rodzaj sterowania optymalnego dedykowany dla układów nieliniowych. W roku 1962 Pearson przedstawił koncepcję definiującą zależne od stanu równanie Riccatiego [20]. Sterowanie optymalne w tamtym czasie było uważane jako zagadnienie trudne, ze względu na problem sterowania nieliniowych systemów dynamicznich. W swojej publikacji Pearson zastosował przybliżenie zależnego od stanu nieliniowego i niestacjonarnego systemu, przez liniowy system stacjonarny, dla którego rozpatrywał kwadratowy wskaźnik jakości. Burghart przedstawił proste rozwiązanie suboptymalnego SDRE, wykorzystując rozwinięcie w szereg Taylora [21].
Gerrard zaproponował suboptymalne sterowanie w sprzężeniu zwrotnym dla nieliniowych systemów w oparciu o kwadratowe kryterium jakości wykorzystując przybliżenie drugiego rzędu [22]. Wernli i Cook opracowali metodę aproksymacji bazującą na rozwinięciu w szereg Taylora, przedstawili obiekt jako zależny od czasu i nieliniowy w funkcji stanu i sterowania, rozpatrując nieafiniczną strukturę SDRE [23]. Pierwsze zastosowanie praktyczne widoczne jest w pracach Cloutiera w latach dziewięćdziesiątych [24–26], gdzie technika ta została użyta do rozwiązania problemu sterowania optymalnego dla nieskończonego horyzontu czasowego w systemach kosmicznych. Przypadki sterowania układów nieliniowych w sprzężeniu zwrotnym dla rzeczywistych obiektów są rozszerzeniem metody sterowania liniowo kwadratowego, która musi spełnić algebraiczne równanie Riccatiego (*ang. Algebraic Riccati Equation- ARE*) aby zagwarantować pożądaną jakość sterowania. Jak pokazano w pracy Cimena [27] sterowniki oparte na SDRE są szeroko wykorzystywane w złożonych systemach ze względu na zakres stabilności, odporność i skuteczność w uzyskiwaniu suboptymalnego prawa sterowania [28–31].

Zapewnienie optymalności w przypadku nieliniowego sterownika jest bardziej skomplikowana niż w przypadku regulatora liniowo kwadratowego ze względu na pojawienie się zależności od stanu w kompensatorze oraz kwadratowym wskaźniku jakości. Udowodniono, że warunki konieczne dla optymalności (tzn. $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$, gdzie H to Hamiltonian) są zawsze spełnione. W przypadku systemu skalarnego zapewniona jest optymalność globalna, w przypadku wielu zmiennych, asymptotyczna lokalna [32]. Analiza stabilności jest najbardziej krytycznym zagadnieniem dla sterowania SDRE. Wernli i Cook udowodnili, że zależne od stanu równanie Riccatiego rozwiązane przy użyciu rozwinięcia w szereg Taylora jest asymptotycznie stabilne w niewielkim otoczeniu [23]. Cloutier przedstawił lokalną i globalną stabilność metody wykorzystując funkcję Lyapunova, która definiuje wzmocnienie kompensatora jako macierz symetryczną dodatnio określoną, co z kolei implikuje, że pochodna tej funkcji jest ujemna [24, 25, 32].

Istotną kwestią w przypadku sterowania SDRE jest przejście z nieliniowego systemu opisanego w ogólnej postaci wektorowej, do alternatywnej notacji macierzowo-wektorowej, któa nosi nazwę zależnej od stanu parametryzacji (*ang. State- Dependent Parameterization SDP*). Niestety zadanie znalezienia odpowiedniej parametryzacji, a właściwie faktoryzacji, jest zadaniem trudnym, stąd w literaturze istnieje wiele publikacji dotyczących tego zagadnienia. Jedno z rozwiązań zostało zaproponowane przez Cloutiera i Mracka [24], jednak dopiero Liang i Lin podali warunki konieczne i wystarczające dla istnienia możliwiej parametryzacji SDC (*ang. State- Dependent Coefficient*). Przedstawili kilka łatwych do sprawdzenia warunków pozwalających na zastosowanie SDC [33–35].

Podejście wykorzystujące zależne od stanu równanie Riccatiego jest efektywnym narzędziem projektowania nieliniowych sterowników w sprzężeniu zwrotnym i znajduje szerokie zastosowanie między innymi w sterowaniu sztuczną ludzką trzustką [36], w obrazowaniu odpowiedzi immunologicznej na wirusa HIV [37], w leczeniu nowotworów [28, 38, 39], w wysokociśnieniowych reaktorach chemicznych [40], w sterowaniu statkami kosmicznymi [26], w robotyce [41–47], w wentylatorach kanałowych [48], w systemach lewitacji magnetycznej [49], w procesach walcowania gorących taśm metalowych [50], systemach sterowania satelitami [51], w lotnictwie [52–54], a także w silnikach synchronicznych z magnesami trwałymi [55, 56] czy w sterowaniu pociskami [57].

Największym mankamentem klasycznej metody wykorzystującej SDRE jest duża obliczeniochłonność i spora liczba operacji logiczno-arytmetycznych potrzebnych do rozwiązania problemu sterowania, co utrudnia implementację w kontekście rzeczywistych układów sterowania. Klasyczna koncepcja uwzględnia zależność od stanu równań Riccatiego co powoduje, że w każdym kroku czasowym, należy rozwiązywać zależne od stanu różniczkowe lub algebraiczne równanie Riccatiego.
Podjęte przez autorkę badania w tej rozprawie i nowe pomysły uwzględniające obecny stan wiedzy, pozwoliły na opracowanie nowych technik znacząco ograniczających liczbę operacji arytmetyczno- logicznych i co najistotniejsze uniezależnić rozwiązanie równań Riccatiego od stanu. Dokonano modyfikacji algorytmu sterowania wprowadzając dwa kompensatory w sprzężeniu zwrotnym, przy czym wzmocnienia tylko jednego z nich wyznacza się z niezależnego od stanu równania Riccatiego, tak jak w metodzie LQR.

Rozdział 2

Cel i zakres pracy

Celem rozprawy było opracowanie i implementacja nowej metody sterowania obiektami nieliniowymi w wyniku przeprowadzonego studium literatury oraz badań realizowanych w trakcie pracy nad rozwojem metody SDRE. W zakresie przeprowadzonych badań podjęto się rozwiązania następujących zagadnień:

- zastosowanie linearyzacji dynamicznej powodującej uniezależnienie od stanu równania Riccatiego zarówno w przypadku ze skończonym, jak i nieskończonym horyzontem czasowym

- rozwiązanie nieliniowego problemu sterowania poprzez sprowadzenie do rozwiązania problemu LQR bez pominięcia nieliniowości w sprzężeniu zwrotnym

- uzyskanie dwóch kompensatorów w sprzężeniu zwrotnym

- uzyskanie nowych warunków suboptymalności

- wykorzystanie wejściowego kompensatora dynamicznego w celu uniezależnienia macierzy sterowania od stanu

- wykorzystanie pseudoinwersji do wyznaczenia kompensatora linearyzującego układ

- wyznaczenie kompensatora odpowiedzialnego za sterowanie suboptymalne z rozwiązania równania Riccatiego

- opracowanie dowodu stabilności lokalnej i globalnej asymptotycznej układu sterowania

- uproszczenie implementacji
- zmniejszenie i ocena symulacyjna nakładu obliczeniowego, a także czasu wyznaczania sterowania
- wykonanie symulacji, na zbiorze układów z ograniczeniami holonomicznymi, które pozwoliły na porównanie wyników sterowania i czasów obliczeń.

Bazując na powyższych wytycznych określono następujące założenia wstępne pracy:

1. Istnienie możliwości wprowadzenia zmian w strukturze układu zamkniętego klasycznej metody SDRE.
2. Układ, który otrzymano po zastosowaniu zmian jest stabilny globalnie oraz lokalnie.
3. Otrzymane prawo sterowania pozwala zmniejszyć nakład obliczeniowy oraz ułatwia implementację nowej metody w systemach.

Na podstawie powyższych założeń postawiono następującą tezę pracy:

Wykorzystanie pseudoinwersji Moore'a- Penrose'a do linearyzacji równań stanu układu zamkniętego w metodzie SDRE daje możliwość poprawy efektywności algorytmu wyznaczania sterowania suboptymalnego w układach z ograniczeniami holonomicznymi. W przypadku nieskończonego horyzontu czasowego, istnieje możliwość redukcji nakładu obliczeniowego w taki sposób, że równanie Riccatiego jest obliczane tylko raz w całym procesie sterowania. Natomiast w przypadku ze skończonym horyzontem czasowym, równanie Riccatiego może być obliczone jedynie dla czasowo zależnych wzmocnień kompensatora w sprzężeniu zwrotnym – tak jak w zagadnieniach sterowania optymalnego LQR.

Plan rozprawy jest następujący. Pierwsze dwa rozdziały dotyczą celu i motywacji podjęcia tematu sterowania z wykorzystaniem SDRE.

Rozdział 3 dotyczy matematycznego opisu układów nieliniowych i definiuje sposób modelowania w przestrzeni stanów oraz zawiera opis parametryzacji SDC.

W rozdziale 4 przedstawiona została metoda terowania liniowo kwadratowego, która stanowi bazę dla metody SDRE. W tym rozdziale została także przedstawiona klasyczna metoda SDRE zarówno ze skończonym, jak i z nieskończonym horyzontem czasowym.

Kolejny rozdział dotyczy istnienia i jednoznaczności rozwiązania sterowania SDRE ze sprzężeniem zwrotnym. Istotne w tym zagadnieniu są mnożniki Lagrage'a jak również równanie Hamiltona- Jacobiego- Bellmana, stanowiące ważne elementy przy definiowaniu sterowania wykorzystującego SDRE.

Rozdział 6 stanowi propozycję nowej metody sterowania suboptymalnego opracowanej przez autorkę, która polega na wprowadzeniu zmian w klasycznym podejściu pozwalając na redukcję nakładu obliczeniowego, nie tracąc przy tym na jakości sterowania. Przedstawione są zmiany dla skończonego oraz nieskończonego horyzontu czasowego.

Następny rozdział jest także osiągnięciem autorki. Dotyczy on analizy stabilności dla proponowanej metody i zawiera dowody zarówno dla potwierdzenia stabilności asymptotycznej lokalnej oraz globalnej.

W rozdziale 8 zostały przedstawione metody rozwiązywania równań Riccatiego. Rozpatrzono najczęściej stosowane metody: rozkład w szereg Taylora jak również algorytm Newtona, Kleinmana czy dekompozycja Schura.

Rozdział 9 przedstawia wyniki symulacji i porównanie sterowania klasyczną metodą wykorzystującą SDRE z nową propozycji tej metody. Opracowane sterowania suboptymalne dla następujących nieliniowych obiektów sterowania: silnika krokowego, quadrokoptera, oscylatora Van der Pola, aktuatora, robota mobilnego, a także manipulatora o 6 stopniach swobody w zadaniu sterowania trzema stopniami.

W ostatnim rozdziale pracy znajdują się wnioski i podsumowanie wyników uzyskanych drogą symulacji, a także propozycje dalszych badań.

Rozdział 3

Modele dynamiczne układów nieliniowych

3.1 Modele w przestrzeni stanów

Projektant wykorzystując opis w postaci modelu w przestrzeni stanów ma znacznie większe możliwości niż w przypadku wykorzystania modelu typu wejście-wyjście. Po pierwsze, posiada znacznie większą ilość informacji o obiekcie, który jest przez niego opisywany, a także o sposobie jego działania. Ponadto dysponując danymi będącymi reakcjami obiektu na zadane wymuszenie, może gromadzić informacje o procesach wewnątrz samego obiektu w czasie regulacji.

Tworząc model zmiennych stanu, należy znać strukturę oraz zjawiska fizyczne zachodzące w opisywanym układzie. Dzięki temu możliwe jest uzyskanie informacji o skutkach sterowań na podstawie danej chwili czasu oraz tych występujących wcześniej.

Konstruując model z użyciem zmiennych stanu należy przedstawić zależności fizyczne opisujące zachowanie układu w postaci równań dynamiki. Następnie dobiera się zmienne stanu w taki sposób, aby możliwe było jednoznaczne określenie stanu układu. Istotną właściwością tego typu modelu jest różniczkowa zależność samych zmiennych stanu.

Wszystkie poniższe wzory dotyczące tej klasy modeli będą odnosiły się do układów nieliniowych, jednak zastosowanie tych modeli możliwe jest także w przypadku układów liniowych [58].

Wiadome jest, że dla systemów nieafinicznych, nieliniową dynamikę systemu

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), t) + \mathbf{g}(\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t), t), \tag{3.1}$$

gdzie:
$\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n$ - wektor stanu
$\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^m$ - wektor wejścia
$\mathbf{f}(\mathbf{z}(t), t)$ - wektor składowych funkcji zależnych od stanu
$\mathbf{g}(\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t), t)$- wektor sterowania
można przedstawić w sposób [59]

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{z}(t))\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{z}(t))\mathbf{w}(t), \tag{3.2}$$

gdzie

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}(t), t) = \mathbf{A}(\mathbf{z}(t))\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{g}(\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t), t) = \mathbf{B}(\mathbf{z}(t))\mathbf{w}(t). \tag{3.3}$$

Wprowadzając wejściowy kompensator dynamiczny

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{u} \tag{3.4}$$

można zapisać (3.1) jako

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{z}) + \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}. \tag{3.5}$$

Oryginalne sterowanie $\mathbf{w}$ terowanie staje się teraz elementem wektora stanu, co więcej skutkiem ubocznym tego rozwiązania jest przekształcenie systemu nieafinicznego (3.1) w układ afiniczny (3.5).

Po dokonaniu parametryzacji SDC, uzyskuje się

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{3.6}$$

gdzie
$\mathbf{x} = [\mathbf{z}^T \quad \mathbf{w}^T]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Poniższe równanie przedstawia model opisany w przestrzeni stanów, przy pomocy równań liniowych jako szczególny przypadek opisu układów nieliniowych

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{3.7}$$

gdzie:
$\mathbf{x}(t)$ - wektor zmiennych stanu $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$
$\mathbf{u}(t)$ - wektor wejściowy układu $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$
$\mathbf{A}$ - macierz stanu układu $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$
$\mathbf{B}$ - macierz wejścia $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n\times m}$
n - liczba zmiennych stanu, definiująca rząd modelu.

Mając zdefiniowane równanie (3.7) uzyskuje się informację na temat zachowania układu, chcąc uzyskać informację na temat sygnałów wychodzących z niego, należy zdefiniować równanie wyjścia [58]

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{3.8}$$

gdzie:
$\mathbf{x}(t)$ - wektor zmiennych stanu $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$
$\mathbf{u}(t)$ - wektor wejściowy układu $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$
$\mathbf{C}$ - macierz wyjścia $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{p\times n}$
$\mathbf{D}$ - macierz sterowań $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{p\times m}$
p - liczba wyjść modelu.

3.2 Modele sparametryzowane

W literaturze pojawiaja się określenie rozszerzonej linearyzacji *(ang. extended linearization)* [60] czy linearyzacji pozornej *(ang. apparent linearization)* [23] dla parametryzacji SDC *(ang. State- Dependenct Coefficient)* [25, 28, 32]. Parametryzacja ta jest procesem przekształcającym nieliniowy system do struktury liniowo podobnej z macierzami SDC. Zakładając, że $\mathbf{F}(\cdot) \in C^1(\Omega)$ i $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ciągła nieliniowa macierz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ zawsze istnieje i jest postaci

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}, \tag{3.9}$$

gdzie $\mathbf{A} : \Omega \to \mathbf{R}^{n\times n}$ jest znajdywane poprzez faktoryzację i jest jednoznaczna dla $n > 1$. Należy zaznaczyć, że wcześniej poczynione założenie odnośnie $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ gwarantuje istnienie globalnej parametryzacji SDC dla $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ na Ω [61].

Niech $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbf{R}^n$ będzie takie, że $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ oraz $\mathbf{F}(\cdot) \in C^k(\Omega)$, $k \geq 1$. Wtedy dla wszystkich $\mathbf{x} \in \Omega$ zawsze istnieje parametryzacja SDC przedstawiona we wzorze (3.9) dla pewnej klasy macierzy $\mathbf{A} : \Omega \to \mathbf{R}^{n\times n}$. Przykład takiej parametryzacji może być przedstawiony w następujący sposób [62]

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \,|_{\mathbf{x}=\lambda \mathbf{x}}\, d\lambda, \tag{3.10}$$

gdzie:
$\lambda \in \mathbf{R}$.
Prawdziwość równania (3.10) można dowieść rozważając funkcję

$$\tilde{\mathbf{F}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n \tag{3.11}$$

zdefiniowaną jako [63]

$$\tilde{\mathbf{F}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}). \tag{3.12}$$

Wtedy dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ zachodzi

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{F}}(1) = \tilde{\mathbf{F}}(0) + \int_0^1 \frac{d\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda. \tag{3.13}$$

Zakładając, że

$$\tilde{\mathbf{F}}(0) = 0 \tag{3.14}$$

oraz

$$\frac{d\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \,|_{\mathbf{x}=\lambda \mathbf{x}}\, \mathbf{x} \tag{3.15}$$

wtedy,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \,|_{\mathbf{x}=\lambda \mathbf{x}}\, d\lambda \mathbf{x}. \tag{3.16}$$

Porównując równanie (3.16) z (3.9) otrzymuje się oczekiwany wynik pod postacią równania (3.10).

Wykorzystując rozszerzoną linearyzację, każdy nieliniowy system, który jest w postaci

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{3.17}$$

i spełnia warunki dla $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ określone powyżej, można przedstawić za pomocą następującej formy SDC

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{3.18}$$

Układ ten ma liniową strukturę z macierzami SDC $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ oraz $\mathbf{B}(\mathbf{x})$.

Przykład 1. *Niech będzie dany system, w którym [64]*

$$\boldsymbol{F}(x) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_1^3 \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Wtedy, najbardziej naturalną parametryzacją SDC jest

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Można także wyznaczyć inną parametryzację SDC odpowiednio mnożąc lub dzieląc przez x_1 postaci

$$\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_1} & 0 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Dodając i odejmując odpowiednio x_1 i x_2 można uzyskać kolejną parametryzację

$$\boldsymbol{A}_3(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -x_2 & 1 + x_1 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Jeśli istnieją przynajmniej 2 parametryzacje SDC, to jest ich nieskończona liczba. Wtedy, dla $0 \leq \alpha \leq 1$ prawdziwe jest

$$\alpha \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}). \tag{3.23}$$

Na podstawie [28, 32, 64] parametryzację SDC można opisać uwzględniając następujące definicje:

Definicja 3.1
Parametryzacja SDC przedstawiona we wzorze (3.18) jest sterowalną parametryzacją dla nieliniowego systemu (3.17) w obszarze Ω jeśli para $\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x})$ jest stabilizowalna (sterowalna) w każdym punkcie w sensie liniowym dla wszystkich $\mathbf{x} \in \Omega$.

Definicja 3.2
Parametryzacja SDC przedstawiona we wzorze (3.18) jest obserwowalną parametryzacją dla nieliniowego systemu (3.17) w obszarze Ω jeśli para $\mathbf{C}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})$ jest obserwowalna w każdym punkcie w sensie liniowym dla wszystkich $\mathbf{x} \in \Omega$.

Definicja 3.3

Parametryzacja SDC przedstawiona we wzorze (3.18) jest macierzą Hurwitza w obszarze Ω jeśli wartości własne $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennych zespolonych (mają ujemne części rzeczywiste) takie, że $Re[\lambda_i(\mathbf{A}(\mathbf{x}))] < 0$ dla wszystkich $\mathbf{x} \in \Omega$.

Rozdział 4

Regulacja LQR i SDRE

4.1 Klasyczna metoda sterowania liniowo kwadratowego LQR

Metoda wykorzystująca regulator liniowo kwadratowy LQR *(ang. Linear Quadratic Regulator)*, jest metodą dedykowaną dla liniowych układów dynamicznych z kwadratowymi wskaźnikami jakości sterowania. Układy te opisuje się liniowymi równaniami różniczkowymi stanu.

Istota sterowania polega na znalezieniu takiego sterowania obiektem liniowym, aby zapewnić minimalizację pewnej funkcji celu, inaczej wskaźnika jakości (*ang. performance index*). Funkcja ta opisuje energię dostarczoną do obiektu i energię w nim traconą, matematycznie ma charakter formy kwadratowej.

Układ regulacji LQR jest układem sterowania z kompensatorem liniowym w sprzężeniu zwrotnym od stanu. Układ ten należy do klasy optymalnych układów sterowania, co zapewnia optymalny dobór wzmocnień regulatora w sprzężeniu zwrotnym względem przyjętego kryterium jakości.

Nieodłącznym elementem są macierze wag, będące parametrami wskaźnika jakości, które należy odpowiednio dobrać do całego systemu. Zazwyczaj stosuje się podejście iteracyjne do znalezienia ich odpowiednich wartości. Jedną z korzyści płynącą z wykorzystania tej metody jest zapewnienie obliczenia macierzy wzmocnień w sprzężeniu zwrotnym oraz zaprojektowania systemu, który jest stabilny [4].

Ze względu na możliwość określenia czasu sterowania rozróżnia się metody:

- LQR ze skończonym horyzontem czasowym,

- LQR z nieskończonym horyzontem czasowym.

W kolejnych podrozdziałach wyprowadzono i opisano obie wymienione metody. Dla uproszczenia zapisu, zależność od czasu celowo pomijana jest w niektórych miejscach.

4.1.1 Sterowanie LQR ze skończonym horyzontem czasowym

W przypadku systemu liniowego

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \tag{4.1}$$

gdzie:

$\mathbf{x}$ - wektor stanu $\in \mathbb{R}^n$
$\mathbf{u}$ - wektor wejścia $\in \mathbb{R}^m$
$\mathbf{A}$ - macierz stanu układu o stałych współczynnikach $\in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\mathbf{B}$ - macierz wejścia o stałych współczynnikach $\in \mathbb{R}^{n\times m}$

określonego na przedziale t $\in [t_0, t_1]$ oraz opisanego wskaźnikiem jakości będącym całką formy kwadratowej minimalizowanego podczas procesu sterowania

$$J(\mathbf{u}) = \mathbf{x}^T(t_1)\mathbf{S}(t_1)\mathbf{x}(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))dt. \tag{4.2}$$

Jest to problem optymalizacji Bolza, będący kombinacją problemów optymalizacji Lagrange'a i Mayera [65], gdzie $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ są symetrycznymi, dodatnio określonymi macierzami, co oznacza, że wartość $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$ jest zawsze dodatnia lub równa 0 dla każdego t dla wszystkich funkcji $\mathbf{x}$ zaś $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ jest symetryczną, dodatnią macierzą, co oznacza, że składnik $\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}$ jest zawsze dodani dla każdego t i dla wszystkich wartości $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Parametr t, jest traktowany jako parametr ukryty i pomijany w dalszej części rozprawy, dotyczy to nie tylko tego podrozdziału, ale także 4.1.2.

Niech układ będzie sterowany, tzn. para $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ będzie sterowalna.

Powyższe zapewnia, że J jest dobrze zdefiniowane. W odniesieniu do wartości własnych macierzy, te związane z macierzą $\mathbf{Q}$ powinny być nieujemne, kiedy wartości własne macierzy $\mathbf{R}$ powinny być dodatnie.
Jeśli obie są diagonalne, to w macierzy $\mathbf{R}$ wszystkie muszą być dodatnie, zaś w macierzy $\mathbf{Q}$ niektóre mogą być zerami na diagonali. Macierz $\mathbf{R}$ musi być odwracalna.

Macierze $\mathbf{Q}$ oraz $\mathbf{R}$ są dobierane przez projektanta systemu. W zależności od doboru macierzy wag, układ zamknięty będzie dawał inną odpowiedź. W ogólności wybór większych wartości dla macierzy $\mathbf{Q}$ powoduje minimalizację wskaźnika J dopiero przy mniejszej normie stanu $\mathbf{x}$ w porównaniu do normy sterowania $\mathbf{u}$. Wybór większych wartości dla $\mathbf{R}$ oznacza, że norma sterowania $\mathbf{u}$ musi być mniejsza aby zapewnić minimalizację wskaźnika J. To implikuje, że większe wartości $\mathbf{Q}$ w ogólności skutkują szybszym zbieganiem stanu do zera, zaś większe wartości macierzy $\mathbf{R}$, większymi przeregulowaniami.

Celem znalezienia sterowania optymalnego, definiuje się Hamiltonian postaci

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}), \tag{4.3}$$

gdzie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem zmiennych dołączonych.

Sterowanie uzyskiwane jest z warunku $\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$. Pamiętając, że $\mathbf{R}$ jest macierzą odwracalną dla każdego t, oraz biorąc pod uwagę gradient Hamiltonianu, można wnioskować, że sterowanie optymalne musi spełniać:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}. \tag{4.4}$$

Równanie (4.4) rzeczywiście maksymalizuje Hamiltonian (globalnie).
Dalej wyznaczana jest pochodna $\mathbf{p}$:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{A}^T\mathbf{p} - \mathbf{Q}\mathbf{x}. \tag{4.5}$$

Następnie wprowadza się następującą zależność liniową

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{x}, \tag{4.6}$$

gdzie $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Po zróżniczkowaniu (4.6) można zapisać, że:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{K}\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{d\mathbf{K}}{dt}\mathbf{x}. \tag{4.7}$$

Uwzględniając (4.4-4.7) oraz wykorzystując równanie kanoniczne otrzymuje się:

$$\mathbf{K}\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K} + \mathbf{A}^T\mathbf{K} + \mathbf{Q} = \frac{d\mathbf{K}}{dt}. \tag{4.8}$$

Równanie (4.8) nazywane jest równaniem różniczkowym Riccatiego *(ang. Riccati differential equation- RDE)*. Daje ono podstawy do zastosowania regulatora LQR w układzie sterowania [66].

Istotne jest podanie warunku początkowego dla rozwiązania równania (4.8). W przypadku skończonego horyzontu czasowego, istnieje konieczność poszerzenia zasady maksimum Pontriagina o warunek transwersalności. Wtedy, na podstawie (4.2) oraz warunku transwersalności [67] uzyskuje się warunek początkowy postaci

$$\mathbf{K}(t_1) = \mathbf{S}(t_1). \tag{4.9}$$

4.1.2 Sterowanie LQR z nieskończonym horyzontem czasowym

Układ dynamiczny opisany jest liniowym równaniem różniczkowym stanu postaci

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \tag{4.10}$$

gdzie:

$\mathbf{x}$ - wektor stanu $\in \mathbb{R}^n$

$\mathbf{u}$ - wektor sterowań $\in \mathbb{R}^m$

$\mathbf{A}$ - macierz układu $\in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\mathbf{B}$ - macierz sterowań $\in \mathbb{R}^{n\times m}$

Niech układ będzie sterowany, tzn. para $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ będzie sterowalna.

Istotą sterowania LQR z nieskończonym horyzontem czasowym jest znalezienie takiego sterowania, które minimalizuje określony wskaźnik jakości. Oznacza to, że celem sterowania jest minimalizacja funkcjonału przy ograniczeniach na dynamikę obiektu. Wskaźnik, będący całką formy kwadratowej ma postać

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \left(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right) dt, \tag{4.11}$$

gdzie $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest symetryczną, dodatnio określoną macierzą, co oznacza, że wartość $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$ jest zawsze dodatnia lub równa 0 dla każdego t dla wszystkich funkcji $\mathbf{x}$ zaś $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ jest symetryczną, dodatnią macierzą, co oznacza, że $\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}$ jest zawsze dodanie dla każdego t dla wszystkich wartości $\mathbf{u}$.

Warunki nakładane na macierze $\mathbf{Q}$ oraz $\mathbf{R}$ w celu minimalizacji wskaźnika jakości J, są takie same jak w przypadku metody LQR ze skończonym horyzontem czasowym, co już zostało szczegółowo opisane w rozdziale 4.1.1.

W celu zaprojektowania układu sterowania i zdefiniowania prawa sterowania, na początku należy określić, czy układ jest sterowalny. Tę informację

uzyskuje się sprawdzając, czy istnieje możliwość przeprowadzenia układu z dowolnego stanu początkowego do stanu końcowego, wykorzystując dopuszczalne sygnały sterujące. Jednakże trajektoria przechodzenia układu (4.10) ze stanu początkowego do końcowego nie jest określona a priori.
W celu sprawdzenia sterowalności wprowadza się macierz $\mathbf{W}$ postaci

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Jeśli macierz $\mathbf{W}$ jest pełnego rzędu, to system jest sterowalny dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, co wynika z warunku Kalmana.

Problem sterowania przedstawiony jest w następujący sposób: mając macierze $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ znaleźć takie dopuszczalne sterowanie $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ dla $t \in [t_0, \infty]$, które przeprowadza stan od $\mathbf{x}_0$ do $\mathbf{x}_\infty$ minimalizując wskaźnik jakości (4.11).

Jeśli funkcje podcałkowe $\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} + \mathbf{u}^T\mathbf{Ru}$ oraz $\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ są ciągle różniczkowalne dla każdego argumentu to można założyć, że $\mathbf{u} \in C\,[t_0, \infty]$ jest sterowaniem minimalizującym wskaźnik $J(\mathbf{u}) : C\,[t_0, \infty] \to \mathbb{R}_+$. W celu rozwiązania tego problemu, należy zdefiniować Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} + \mathbf{u}^T\mathbf{Ru}\right) + \mathbf{p}^T\left(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}\right), \tag{4.13}$$

gdzie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem zmiennych dołączonych.

Jeśli $\mathbf{u} \in C\,[t_0, \infty]$ jest sterowaniem minimalizującym wskaźnik (4.11) w odniesieniu do (4.10) i jeśli $\mathbf{x}$ jest stanem, to istnieje takie $\mathbf{p} \in C\,[t_0, \infty]$, dla którego równania kanoniczne zasady maksimum Pontriagina są następujące

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}\left(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t\right) = \mathbf{0} \quad dla \quad t \in [t_0, \infty] \tag{4.14}$$

oraz

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t\right) = \mathbf{0} \quad dla \quad t \in [t_0, \infty] \quad i \quad \mathbf{p}(\infty) = \mathbf{0}. \tag{4.15}$$

Powyższe równania są warunkami nakładanymi na $\mathbf{p}$, zapewniającymi uzyskanie sterowania optymalnego minimalizującego (4.11).

Obliczając pochodną cząstkową z (4.15) uzyskuje się

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{A}^T\mathbf{p} - \mathbf{Qx}. \tag{4.16}$$

Wynika z tego, że każdy optymalny wektor sterowań $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ i odpowiadający wektor stanu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ spełnia (4.14), co skutkuje, że

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T\mathbf{p} = \mathbf{0}. \tag{4.17}$$

Stąd sterowanie optymalne wynosi

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}. \tag{4.18}$$

Niech $\mathbf{p}$ będzie wyrażony przez formę liniową

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{x}, \tag{4.19}$$

gdzie $\mathbf{K}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, natomiast niech $\mathbf{x}$ będzie rozwiązaniem równania

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}\mathbf{x} \tag{4.20}$$

dla $t \in [t_0, \infty], \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.
Wtedy sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym przyjmuje postać

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}\mathbf{x}. \tag{4.21}$$

Wyprowadzając pochodną z równania (4.19) otrzymuje się

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{K}}\mathbf{x} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{K}}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}\mathbf{x}. \tag{4.22}$$

Przyrównując równania (4.16) oraz (4.22) uzyskano

$$\dot{\mathbf{K}}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}\mathbf{x} = -\mathbf{A}^T\mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{Q}\mathbf{x}. \tag{4.23}$$

Porządkując i wyłączając przed nawias $\mathbf{x}$ otrzymuje się różniczkowe równanie Riccatiego (*ang. Differential Riccati Equation- DRE*)

$$\dot{\mathbf{K}} + \mathbf{K}\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K} + \mathbf{A}^T\mathbf{K} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{4.24}$$

które rozwiązane w czasie $t_0 = 0$ przy warunku $\mathbf{K}(\infty) = \mathbf{0}$ daje stałą macierz niezależną od t_0, która jest unikalnym, symetrycznym, dodatnim skończonym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego- ARE. Daje ono podstawy do zastosowania regulatora LQR w układzie sterowania [66]

$$\mathbf{K}\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K} + \mathbf{A}^T\mathbf{K} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \tag{4.25}$$

Sterowanie optymalne ma postać

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}\mathbf{x}. \tag{4.26}$$

Dla układu ze wskaźnikiem (4.11) w odniesieniu do (4.10) równanie Riccatiego rozwiązuje się z wykorzystaniem, np. macierzy funkcji signum czy metody Schura lub Newtona [66].

4.2 Klasyczna metoda sterowania SDRE dla układów nieliniowych

Metoda sterowania SDRE (*ang. State Dependent Riccati Equation*) stała się bardziej popularna ze względu na efektywną możliwość projektowania nieliniowych regulatorów oraz zapewnienie większej elastyczności poprzez wprowadzenie zależnych od stanu macierzy wag [24].

Nieliniowa dynamika systemu w metodzie SDRE, jest przybliżana z użyciem parametryzacji SDC do systemu liniowego z macierzami współczynników zależnymi od stanu, które są kluczowe do rozwiązania algebraicznego równania Riccatiego- ARE, oraz równania różniczkowego DRE i uzyskania suboptymalnego prawa sterowania. Minimalizacja nieliniowego wskaźnika jakości daje formę kwadratową [20, 25, 27, 68, 69] i jest także wykorzystywana w systemach lokalnie dodatnich[31, 70].

W ostatniej dekadzie metoda ta była wykorzystywana w wielu różnych dziedzinach naukowych. I tak na przykład, sterowanie i estymacja stanu w satelitach i statkach kosmicznych [26], sterowanie serwopneumatycznymi napędami [71], sterowanie quadrocopterami [72–74], robotyka [75], sterowanie nieafinicznymi systemami [76], a także w medycynie do dawkowania leków w trakcie chemioterapii [77].

Jedną z największych niedogodności metody SDRE jest zalezość od czasu równań Riccatiego. To sprawia, że konieczne staje się rozwiązywanie równań wielokrotnie, podczas procesu sterowania, co z kolei powoduje trudności związane z implementacją w systemach rzeczywistych [64, 78].

4.2.1 Klasyczna metoda SDRE ze skończonym horyzontem czasowym

Rozważany jest nieliniowy system

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{4.27}$$

gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ są odpowiednio wektorami stanu i wejścia. $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ jest wektorem klasy C^k, zaś macierz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ jest macierzą o stałych współczynnikach. Należy znaleźć sterowanie dopuszczalne $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ dla $t_0 \leq t \leq t_1$, które minimalizuje wskaźnik jakości [5, 23, 79, 80]

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_1)\mathbf{S}(t_1)\mathbf{x}(t_1) + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t))dt, \tag{4.28}$$

gdzie $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $\mathbf{S}$ są symetrycznymi dodatnimi półokreślonymi macierzami, zaś $\mathbf{R}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ jest macierzą symetryczną dodatnio określoną. Macierze te, są różniczkowalne w sposób ciągły przynajmniej do pierwszej pochodnej.

Rozwiązanie problemu sterowania ze skończonym horyzontem czasowym wymaga przedstawienia (4.27) w postaci sparametryzowanej, co było przedmiotem pracy [24]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{4.29}$$

gdzie $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Istnieje wiele metod parametryzacji SDC. Każda z nich powinna spełniać dla $0 \le \alpha \le 1$ zależność

$$\alpha\mathbf{A}_I(\mathbf{x})\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{A}_{II}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \alpha\mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1-\alpha)\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \tag{4.30}$$

W celu zaprojektowania układu sterowania i zdefiniowania prawa sterowania, na początku należy określić, czy układ jest sterowalny. Ogólnie, sterowalność informuje o możliwości sterowania układu z dowolnego stanu początkowego $\mathbf{x}(0)$ do stanu końcowego $\mathbf{x}(t_1)$ wykorzystując dopuszczalne sygnały sterujące. Jednakże trajektoria przechodzenia układu (4.27) z punktu początkowego do końcowego nie jest sprecyzowana. W celu sprawdzenia sterowalności, wprowadza się macierz $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ zależną od stanu, postaci

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}]. \tag{4.31}$$

Jeśli macierz $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ (w tym wypadku zależna od stanu) jest pełnego rzędu, to system jest sterowalny dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. W praktyce, należy wybrać taką parametryzację, która zapewni macierzy $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ pełen rząd dla całego obszaru sterowania.

Jeśli funkcje podcałkowe $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x}+\mathbf{u}^T\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ oraz $\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$ są różniczkowalne w sposób ciągły dla każdego argumentu, to można założyć, że $\mathbf{u} \in C[t_0,\infty]$ jest sterowaniem minimalizującym wskaźnik $J(\mathbf{u}) : C[t_0,\infty] \to \mathbb{R}_+$. W celu rozwiązania problemu, stosuje się rachunek Hamiltona-Jakobiego-Bellmana, uzyskując Hamiltonian postaci

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{u}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}), \tag{4.32}$$

gdzie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem zmiennych dołączonych i korzystając z warunku optymalności $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$ uzyskuje się prawo sterowania analogicznie jak dla problemu sterowania z regulatorem liniowo kwadratowym LQR, postaci

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}. \tag{4.33}$$

Podstawiając

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} \tag{4.34}$$

gdzie $\mathbf{K}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i obliczając pochodną obu stron równania (4.34) po czasie można zapisać:

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x}. \tag{4.35}$$

Konieczny warunek optymalności dla SDRE [25] ma postać

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \tag{4.36}$$

Stąd na podstawie równania (4.35) oraz (4.36) można uzyskać

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \\ \mathbf{x}^T\frac{\partial \mathbf{A}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \\ \left[\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x})^T\mathbf{K}(\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x})\right]\mathbf{x} = \mathbf{0},\end{gathered} \tag{4.37}$$

gdzie

$$\dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T\mathbf{K}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \tag{4.38}$$

jest algebraicznym różniczkowym równaniem Riccatiego (*ang. Differential Algebraic Riccati Equation (DARE)*) z warunkiem początkowym

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}(t_1)) = \mathbf{S}(\mathbf{x}(t_1)). \tag{4.39}$$

Warunek konieczny optymalności jest zaś postaci

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \\ \mathbf{x}^T\frac{\partial \mathbf{A}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} = 0.\end{gathered} \tag{4.40}$$

4.2.2 Klasyczna metoda SDRE z nieskończonym horyzontem czasowym

Niech dynamiczny układ nieliniowy będzie opisany równaniem (4.27), gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ są odpowiednio wektorami stanu i wejścia. Macierz $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ jest nieliniową funkcją wektorową klasy C^k, zaś macierz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ jest macierzą o stałych współczynnikach. Należy znaleźć sterowanie dopuszczalne $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, które minimalizuje wskaźnik jakości [5, 23, 79, 80]

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{u})dt, \tag{4.41}$$

gdzie $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest symetryczną dodatnią półokreśloną macierzą, zaś $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ jest macierzą symetryczną dodatnio określoną. Macierze te, są różniczkowalne w sposób ciągły przynajmniej do pierwszej pochodnej. Przepisując równanie (4.27) do formy SDC uzyskuje się

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{4.42}$$

gdzie $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Analogicznie, jak w metodzie przedstawionej w punkcie 4.2.1

$$\alpha\mathbf{A}_I(\mathbf{x})\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{A}_{II}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \alpha\mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1-\alpha)\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \tag{4.43}$$

W celu zaprojektowania układu sterowania i zdefiniowania prawa sterowania, na początku należy określić, czy układ jest sterowalny.
Tę informację można uzyskać sprawdzając czy istnieje możliwość przeprowadzenia układu zdowolnego stanu początkowego do stanu końcowego wykorzystując dopuszczalne sygnały sterujące. Jednakże trajektoria przechodzenia układu (4.27) ze stanu początkowego do końcowego nie jest określona a priori. W celu sprawdzenia sterowalności, wprowadza się macierz $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ zależną od stanu, postaci

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}]. \tag{4.44}$$

Jeśli macierz $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ (w tym wypadku zależna od stanu) jest pełnego rzędu, to system jest sterowalny dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. W praktyce, należy wybrać taką parametryzację, która zapewni macierzy $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ pełen rząd dla całego obszaru sterowania.

Problem sterowania dla nieliniowych ciągłych układów sterowania (4.27) może być przedstawiony w następujący sposób: mając nieliniowe funkcje

$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{R}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ znaleźć takie sterowanie $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ dla $t \in [t_0, \infty]$, które przeprowadza stan od $\mathbf{x}_0$ do $\mathbf{x}_\infty$ minimalizując wskaźnik jakości (4.41).

Jeśli funkcje podcałkowe $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}(\mathbf{x})(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}(\mathbf{x})(\mathbf{x})\mathbf{u}$ oraz $\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ są różniczkowalne w sposób ciągły dla każdego argumentu, to można założyć, że $\mathbf{u} \in C[t_0, \infty]$ jest sterowaniem minimalizującym wskaźnik $J(\mathbf{u}) : C[t_0, \infty] \to \mathbb{R}_+$.

W celu rozwiązania problemu, należy zdefiniować Hamiltonian

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{u}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}), \tag{4.45}$$

gdzie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem zmiennych dołączonych.

Niech $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ oraz $\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ będą ciągle różniczkowalnymi funkcjami dla każdego ze swoich argumentów. Jeśli $\mathbf{u} \in C[t_0, \infty]$ jest sterowaniem minimalizującym wskaźnik (4.41) w odniesieniu do (4.42) i jeśli $\mathbf{x}$ jest stanem, to istnieje takie $\mathbf{p} \in C[t_0, \infty]$, dla którego

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{0} \quad dla \quad t \in [t_0, \infty] \tag{4.46}$$

oraz

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad dla \quad t \in [t_0, \infty] \quad i \quad \mathbf{p}(\infty) = \mathbf{0}, \tag{4.47}$$

które są warunkami nałożonymi na $\mathbf{p}$ zapewniającymi uzyskanie sterowania optymalnego minimalizującego (4.41).

Wynika z tego, że każda optymalna trajektoria sterowania $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ i odpowiadający wektor stanu $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ spełnia (4.46) co skutkuje, że

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{B}^T\mathbf{p} = \mathbf{0}. \tag{4.48}$$

Stąd sterowanie optymalne wynosi

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T\mathbf{p}, \tag{4.49}$$

a wektor kosztów sterowania jest następującej postaci

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\left[\frac{\partial(\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \mathbf{p} - \mathbf{Q}\mathbf{x} \tag{4.50}$$

dla $t \in [t_0, \infty], \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ oraz $\mathbf{p}(\infty) = \mathbf{0}$ gdzie

$$\frac{\partial(\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}. \tag{4.51}$$

Niech $\mathbf{p}$ będzie nieliniową funkcją stanu wyrażoną przez

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x}, \tag{4.52}$$

gdzie $\mathbf{K}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, natomiast $\mathbf{x}$ jest rozwiązaniem nieliniowego równania stanu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} \tag{4.53}$$

dla $t \in [t_0, \infty], \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Wtedy sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym przyjmuje postać

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t). \tag{4.54}$$

Ważne jest wyznaczenie pochodnej $\dot{\mathbf{p}}$ z uwzględnieniem równania (4.52) i zasady maksimum Pontiargina. Wówczas uzyskuje się

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x}. \tag{4.55}$$

Następnie przyrównując (4.55) z $\dot{\mathbf{p}}$ z równania (4.50) otrzymuje się

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} \\ &= -\left[\frac{\partial(\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{4.56}$$

Porządkując równanie (4.56) uzyskuje się

$$\begin{aligned}&\left[\dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) + \left[\frac{\partial(\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x})\right. \\ &\qquad \left. -\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x})\right] \mathbf{x} = \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{4.57}$$

Na podstawie prac [27, 64], równanie (4.57) można rozdzielić na: zależne od stanu równanie Riccatiego oraz pozostałą część odpowiedzialną za tzw. warunek optymalności.

Wówczas $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ będzie rozwiązaniem zależnego od stanu równania Riccatiego (SDRE), o postaci

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{4.58}$$

z warunkiem optymalności [32, 64]

$$\dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) + \left[\frac{\partial(\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \tag{4.59}$$

Na tej podstawie można podać suboptymalną postać sterowania

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x}. \tag{4.60}$$

Dla układu ze wskaźnikiem (4.41) w odniesieniu do (4.27) równanie Riccatiego dla systemów złożonych rozwiązuje się najczęściej numerycznie. W ogólności, rozwiązanie dla (4.58) nie może być znalezione analitycznie. Jedną z metod rozwiązania tego problemu jest użycie pakietów do obliczeń symbolicznych. Jednakże dla złożonych systemów, rozwiązanie może być zbyt skomplikowane i wtedy potrzebne jest przybliżenie równania. Do tego celu można użyć, np. metody interpolacyjnej lub rozkładu w szereg Taylora, jak przedstawiono w [64].

Rozdział 5

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania

5.1 Mnożniki Lagrange'a

Metoda mnożników Lagrange'a pozwala wyznaczać ekstrema warunkowe funkcji różniczkowalnych, stosowana jest w teorii optymalizacji.

Możliwe jest skorzystanie z tej metody, jeśli spełnione są następujące warunki [81, 82]:

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - funkcja, dla której poszukiwane są ekstrema, określona na zbiorze $\Omega \in \mathbb{R}^n$ przyjmująca wartości rzeczywiste, posiadająca ciągłe pochodne cząstkowe

2. Ograniczenia określone równaniami $G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $G_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad G_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ definiują punkty, na których optymalizowana jest funkcja i zawierają się w zbiorze $S \in \Omega$

3. Zarówno funkcja *f*, jak i funkcje wiążące zmienne muszą być klasy C^1, a także być określone w każdym punkcie zbioru Ω

4. $G = (G_1, G_2, \ldots, G_k)$- funkcja, której różniczka w każdym punkcie zbioru Ω ma maksymalny rząd macierzy.

Kluczowe jest zdefiniowanie na początku gradientu, dla funkcji $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, określa się go jako

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \tag{5.1}$$

Twierdzenie 1. ***Warunek konieczny istnienia ekstremum warunkowego***

Jeśli f osiąga w punkcie regularnym $\boldsymbol{x} \in S$ ekstremum warunkowe, to spełniony jest układ równań

$$\begin{cases} \nabla(f - \lambda_1 g_1 - \ldots - \lambda_k g_k)(\boldsymbol{x}) = 0 \\ g(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

dla pewnych liczb rzeczywistych (zwanych mnożnikami) postaci $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Warunek (5.2) można zapisać w następujący sposób

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in S, \tag{5.3}$$

co oznacza, że gradient funkcji f w punkcie $\mathbf{x}$ jest kombinacją liniową gradientów funkcji g.

Metoda sprowadza się do znalezienia mnożników $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ oraz punktów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spełniających układ równań (5.2) [82].

Lagrangianem nazywana jest funkcja określana jako [81]

$$\begin{aligned} &L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \\ &\lambda_1 G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \ldots - \lambda_k G_k(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Zerowanie się pochodnych cząstkowych jest warunkiem koniecznym znalezienia ekstremum związanego, jednak nie jest warunkiem wystarczającym. Rozstrzygnięcie czy jest to minimum, maksimum czy punkt siodłowy możliwe jest przy sprawdzaniu drugiej różniczki Lagrangianu, na podstawie macierzy Hessego [83].

Twierdzenie 2. *Określoność macierzy Hessego definiuje ekstremum ścisłe. Macierz Hessego jest ujemnie półokreślona dla maksimum funkcji f w punkcie $x_0 \in S$, zaś dodatnio półokreślona dla minimum.*

5.2 Równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana, rozmaitość Lagrange'a i rozwiązanie lepkościowe

W zagadnieniach sterowania optymalnego, bardzo istotnym elementem jest istnienie rozwiązania Hamiltona-Jakobiego-Bellmana na rozmaitości Lagrange'a. Wiąże się ono z rozwiązaniem zagadnienia programowania dynamicznego dla nieskończonego horyzontu czasowego. Istotny jest komentarz na temat istnienia rozwiązania programowania dynamicznego dla nieskończonego horyzontu czasowego w przypadku nieliniowego optymalnego problemu sterowania dla modelu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t), \tag{5.5}$$

oraz wskaźnika

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{u})dt. \tag{5.6}$$

W celu uzasadnienia późniejszych hipotez, można zdefiniować funkcję kosztu [5]

$$V(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \underset{\mathbf{u}(\cdot)\in U}{inf} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\cdot)), \tag{5.7}$$

która jest różniczkowalna w sposób ciągły, w zbiorze dopuszczalnych sterowań. Najlepiej jeśli pożądana funkcja kosztu V jest statycznym rozwiązaniem problemu Cauchy'ego dla powiązanego cząstkowego różniczkowego równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana

$$\frac{\partial}{\partial t}V(\mathbf{x}) + \underset{\mathbf{u}(\cdot)\in U}{inf} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial}{\partial t}V(\mathbf{x})) = 0, \tag{5.8}$$

gdzie H jest hamiltonianem funkcji. Dla problemu sterowania opisanego (5.5),(5.6) hamiltonian jest postaci

$$H = \frac{\partial}{\partial t}V^T(\mathbf{x})[\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] + \frac{1}{2}[\mathbf{x}^T\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{u}], \tag{5.9}$$

a równanie HJB przyjmuje postać

$$\frac{\partial}{\partial t}V^T(\mathbf{x})[\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] + \frac{1}{2}[\mathbf{x}^T\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{u}] = 0 \tag{5.10}$$

z warunkami brzegowymi $V(0) = 0$, gdy $\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t) = 0$.

Rozwiązanie równania (5.10) można uzyskać poprzez rozważenie grupy problemów ze skończonym horyzontem czasowym, co jest typowym podejściem przy rozwiązywaniu problemu sterowania LQR z nieskończonym horyzontem czasowym i wymaga spełnienia warunków stabilizowalności i obserwowalności. Zostało to przeanalizowane przez Lukesa [84] dla nieliniowych systemów typu (5.5) dla sterowania optymalnego oraz przez Van der Schafta [85] dla problemu H_∞. Powiązanie Hamiltonianu z mnożnikami Lagrange'a

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \tag{5.11}$$

dla stanu $\mathbf{x}$ i sprzężonej zmiennej $\boldsymbol{\lambda}$ wynika z zasady maksimum.

Hipoteza 1. *Linearyzacja (5.5), (5.6) w punkcie równowagi jest stabilizowalna i obserwowalna, tak jak* $\left\{\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}(0), \boldsymbol{B}(0), \boldsymbol{Q}^{1/2}(0)\right\}$.

Lemat 1. *Pod wpływem Hipotezy 1, ma się do czynienia z hiperbolicznym punktem równowagi. Wynika z tego, że istnieje stabilna przestrzeń Lagrange'a L dla dynamiki Hamiltonianu postaci (5.11) w odniesieniu do (5.5) oraz (5.6) [86].*

Hipoteza 1 może być wykorzystana do skonstruowania gładkiej $V(\mathbf{x})$ w otoczeniu punktu równowagi. Istnienie rozwiązania zlinearyzowanego problemu w punkcie równowagi, poprzez te założenie skutkuje istnieniem stabilnej przestrzeni Lagrange'a L. Co więcej wynika z tego, że L lokalnie ma dobrze zdefiniowane rzutowanie na przestrzeń stanu i odpowiadające równanie statyczne $V(\mathbf{x})$ jest gładkie. $V(\mathbf{x})$ jest w zasadzie funkcją generującą dla L. Oznacza to, że dla $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$, L jest zbiorem punktów $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ w przestrzeni fazowej, i $dV(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda} d\mathbf{x}$ wzdłuż trajektorii Hamiltonianu leży na L [85]. To także implikuje, że sterowanie optymalne jest zdefiniowane w sprzężeniu zwrotnym następująco

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}. \tag{5.12}$$

Zależność (5.12) można interpretować jako rozszerzenie rozwiązania sterowania optymalnego na przypadek nieliniowy.

Gładkość funkcji $V(\mathbf{x})$ nie jest spełniona, gdy trajektorie optymalne zaczynają się krzyżować (cofać w czasie). W takich punktach pojawiają się osobliwości w rzutowaniu L na przestrzeń stanu i $\int \boldsymbol{\lambda} d\mathbf{x}$ nie pozwala uzyskać dobrze zdefiniowanej funkcji zależnej od $\mathbf{x}$. Pomimo tego funkcja kosztu dla

problemu sterowania optymalnego jest nadal dobrze określona poza tymi punktami i w rzeczywistości jest statycznym rozwiązaniem lepkościowym dla (5.10) zapewniając, że rozwiązanie jest ograniczone lokalnie.
W tym konkretnym przypadku, kiedy założenia lokalne skutkują istnieniem przestrzeni L w artykule [87] pokazano w jaki sposób znaleźć statyczne rozwiązanie lepkościowe $V(\mathbf{x})$ dla (5.10) poza punktami osobliwymi. Poza warunkami dotyczącymi lokalnej stabilizowalności i obserwowalności w otoczeniu punktu równowagi, funkcja $V(\mathbf{x})$ spełnia warunek Lipschitza dla (5.10) [87]. Warunek ten można podać przy pomocy następnej hipotezy.

Hipoteza 2. *Funkcja kosztu $V(\boldsymbol{x})$ zdefiniowana jako (5.7) w (5.10) spełnia lokalnie warunek Lipschitza w Ω w otoczeniu punktu równowagi.*

Podsumowując, ***Hipoteza 1*** zapewnia istnienie gładkiego, optymalnego lokalnie rozwiązania $V(\mathbf{x})$. ***Hipoteza 2*** pozwala na przyjęcie większego obszaru w otoczeniu punktu równowagi, w którym $V(\mathbf{x})$ jest lokalnie funkcją spełniającą warunek Lipschitz'a.

W obszarze, gdzie $V(\mathbf{x})$ jest gładkim nieujemnym rozwiązaniem (5.10), jej minimum jest osiągane dla (5.12), dlatego podstawiając

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\frac{\partial V^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^t\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{5.13}$$

zaś $V(\mathbf{x})$ jest rozwiazaniem (5.13). Ponieważ $\frac{\partial V(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$ [85], $\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ można zapisać jako

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} \tag{5.14}$$

dla pewnej macierzy $\mathbf{K}(\mathbf{x})$. $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ może być przedstawione w sposób

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \tag{5.15}$$

dla pewnej macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Dla każdej postaci macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ spełniającej (5.15), $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \dfrac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{x}}$ kiedy $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$, co implikuje $\dfrac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{0})$.
Jeśli linearyzacja Jacobianu dla (5.5) jest niestabilizowalna, wtedy nie istnieje taka parametryzacja SDC dla $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ że spełniona jest ***Hipoteza 1*** mówiąca o tym, że para $\{\mathbf{A}(\mathbf{0}), \mathbf{B}(\mathbf{0})\}$ jest stabilizowalna.

Uwzględniając zależności (5.14) i (5.13) przekształca się w

$$\mathbf{x}^T[\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x})]\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{5.16}$$

W problemie liniowym, ARE uzyskiwane jest bezpośrednio z (5.16). Jednakże, skoro $\mathbf{A}$ jest macierzą zależną od stanu $\mathbf{x}$, wielkość wynikająca z nawiasu nie może być równa zeru.

Niestety złożoność równania HJB (5.13) uniemożliwia znalezienie rozwiązania z wyjątkiem prostych małowymiarowych systemów. Aby umożliwić implementację w czasie rzeczywistym, należy unikać rozwiązywania cząstkowych równań różniczkowych lub problemu wartości granicznej. To zmusiło do poszukiwania innych alternatywnych, suboptymalnych rozwiązań tego problemu, jak np. metoda SDRE. Podejście to zapewnia aproksymację rozwiązania (5.16) (a przez to także równania HJB (5.13)) i pozwala uzyskać suboptymalne prawo sterowania w sprzężeniu zwrotnym dla nieskończonego horyzontu czasowego definiowanego przez (5.5) i (5.6).

Zastosowanie algorytmu SDRE do aproksymacji rozwiązania (5.16) pociąga za sobą zignorowanie wymagania, że $\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ jest gradientem pewnej funkcji (5.14) i w zamian zakłada się, że $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ jest macierzą symetryczną. Dzięki temu dla dowolnego $\mathbf{x}$, SDRE sprowadza się do znalezienia rozwiązania $\mathbf{K}(\mathbf{x})$, które jest macierzą symetryczną dodatnio określoną dla algebraicznego SDRE

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{5.17}$$

i wstawienia, w tym konkretnym $\mathbf{x}$, do sterowania

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x}. \tag{5.18}$$

Z punktu widzenia złożoności obliczeniowej i możliwości implementacji, omawiane rozwiązanie jest znacznie bardziej interesujące niż rozwiązywanie równania HJB.

5.3 Istnienie sterowania stabilizującego SDRE ze sprzężeniem zwrotnym

Warunki konieczne nałożone na $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ oraz $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ zapewniają istnienie macierzy wzmocnień $\mathbf{K}(\mathbf{x})$, dla której macierz dynamiki zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego,

$$\mathbf{A}_{CL}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x}), \tag{5.19}$$

jest macierzą Hurwitza [88].

Na początek należy określić kilka definicji, skorelowanych z istnieniem sterowania stabilizującego SDRE ze sprzężeniem zwrotnym.

Definicja 1. *Reprezentacja SDC systemu*

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(t) \tag{5.20}$$

jest stabilizowalną (sterowalną) parametryzacją nieliniowego systemu (5.5) w $\Omega \in \mathbb{R}^n$ jeśli para $\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\}$ jest stabilizowalna (sterowalna) w sensie liniowym dla wszystkich $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Definicja 2. *Reprezentacja SDC systemu (5.20) jest obserwowalną parametryzacją nieliniowego systemu (5.5) w $\Omega \in \mathbb{R}^n$ jeśli para $\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{Q}^{1/2}(\boldsymbol{x})\}$ jest obserwowalna w sensie liniowym dla wszystkich $\boldsymbol{x} \in \Omega$.*

Definicja 3. *Reprezentacja SDC systemu (5.20) jest postaci Hurwitza w przestrzeni Ω jeśli wartości własne macierzy $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie $Re(s) < 0$ dla wszystkich $\boldsymbol{x} \in \Omega$ (mają ujemne części rzeczywiste).*

Definicja 4. *Prawo sterowania*

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} \tag{5.21}$$

będące klasy $C^1(\mathbb{R}^n)$ uznawane jest za możliwe do uzyskania ze sterowania SDRE w obszarze Ω jeśli istnieje stabilizowalna parametryzacja SDC $\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\}$, dodatnio półokreślona macierz wag stanu $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ oraz dodatnio określona macierz wag sterowania $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$, takie że zależne od stanu sterowanie (5.18) spełnia (5.21) dla wszystkich $\boldsymbol{x}$.

Twierdzenie 1. *Prawo sterowania (5.21) będące klasy $C^1(\mathbb{R}^n)$ uznawane jest za możliwe do uzyskania ze sterowania SDRE w obszarze Ω jeśli istnieje* *stabilizowalna parametryzacja SDC* $\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\}$*, taka że macierz zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego (5.19) jest macierzą Hurwitza w* Ω*, a wzmocnienie* $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$ *spełnia minimalnofazowośc w* Ω*, oznacza to, że zera wzmocnienia pętli* $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})]^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ *leżą w zamkniętej lewej półpłaszczyźnie* $Re(s) \leq 0$ *[88].*

Mimo, że ***Twierdzenie 1*** zapewnia warunki konieczne i wystarczające dla uzyskania sterowania SDRE, nie jest ono w pełni konstruktywne ze względu na fakt, że istnieje nieskończona liczba parametryzacji SDC.

Rozdział 6

Propozycja nowej metody SDRE

Przedstawione w poprzednich rozdziałach klasyczne podejście do metody SDRE ze skończonym oraz nieskończonym horyzontem czasowym posiada jedną podstawową wadę. Podczas implementacji rzeczywistego układu sterowania zachodzi problem rozwiązywania równania Riccatiego. Musi ono być rozwiązywane dla każdego kroku czasowego w dyskretnym układzie regulacji. Nakład obliczeniowy, jak i liczbę operacji arytmetyczno-logicznych potrzebnych do znalezienia jego rozwiązania i zapewnienia tym samym sterowania optymalnego można zredukować. Takie podejście zaprezentowano, przedstawiając zmodyfikowaną metodę SDRE dla skończonego i nieskończonego horyzontu czasowego, stanowiące cel rozprawy doktorskiej.

Nowym podejściem prezentowanym w tej rozprawie jest przedstawienie możliwości rozwiązania sterowania optymalnego nieliniowego systemu poprzez rozwiązanie równania Riccatiego tylko raz w całym procesie sterowania w przypadku nieskończonego horyzontu czasowego. Wykorzystując linearyzację możliwe jest zmodyfikowanie metody i obliczanie czasowo zależnych wzmocnień kompensatora tak jak w zagadnieniach sterowania LQR dla skończonego horyzontu czasowego.

Nowym autorskim wkładem do poprawy efektywności metody zarówno w skończonym, jak i nieskończonym horyzoncie czasowym jest wprowadzenie wejściowego kompensatora dynamicznego, co zostało już przedstawione w rozdziale 3.

6.1 Nowa metoda sterowania SDRE dla układów nieliniowych ze skończonym horyzontem czasowym

Niech będzie dany nieliniowy system dynamiczny

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{6.1}$$

gdzie $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ są odpowiednio wektorami stanu i wejścia. Wektor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ jest nieliniową funkcją klasy C^k, zaś macierz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ jest macierzą o stałych współczynnikach.

Równanie (6.1) można zapisać w postaci sumy współczynników zależnych i nie zależnych od stanu, co jest pierwszą nową propozycją autorki

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{6.2}$$

gdzie

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t)) \tag{6.3}$$

jest sumą macierzy o stałych współczynnikach i zależnej od stanu.

Tak jak w poprzednich podrozdziałach wspomniano, istnieje wiele metod parametryzacji SDC dla (6.2), każda powinna być prawdziwa dla $0 \leq \alpha \leq 1$.

$$\begin{aligned} &\alpha\left[\mathbf{A}_{1,I} + \mathbf{A}_{2,I}(\mathbf{x}(t))\right]\mathbf{x}(t) + (1-\alpha)\left[\mathbf{A}_{1,II} + \mathbf{A}_{2,II}(\mathbf{x}(t))\right]\mathbf{x}(t) = \\ &\alpha\mathbf{A}_{1,I} + (1-\alpha)\mathbf{A}_{1,II} + \alpha\mathbf{A}_{2,I}(\mathbf{x}(t)) + (1-\alpha)\mathbf{A}_{2,II}(\mathbf{x}(t)) = \\ &\alpha\mathbf{F}_I(\mathbf{x}(t)) + (1-\alpha)\mathbf{F}_{II}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \end{aligned} \tag{6.4}$$

W celu zaprojektowania układu sterowania i zdefiniowania prawa sterowania, na początku należy określić, czy układ jest sterowalny.
W celu sformułowania łatwego obliczeniowo kryterium sterowalności, wprowadza się macierz $\mathbf{W}(\mathbf{x}(t))$ zależną od stanu, postaci

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}(t)) = [\mathbf{B} \quad (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t)))\mathbf{B} \quad \ldots \quad (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t)))^{n-1}\mathbf{B}]. \tag{6.5}$$

Jeśli macierz $\mathbf{W}(\mathbf{x}(t))$ (w tym wypadku zależna od stanu) jest pełnego rzędu, to system jest sterowalny dla każdego $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. W praktyce, należy wybrać taką parametryzację, która zapewni macierzy $\mathbf{W}(\mathbf{x}(t))$ pełen rząd dla całego obszaru sterowania.

Tak jak w klasycznej metodzie SDRE, należy znaleźć sterowanie dopuszczalne $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, które minimalizuje wskaźnik jakości [5, 23, 79, 80]

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_1)\mathbf{S}(\mathbf{x}(t_1))\mathbf{x}(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t))dt, \quad (6.6)$$

gdzie $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $\mathbf{S}(\mathbf{x}(t))$ są symetrycznymi dodatnimi półokreślonymi macierzami, zaś $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ jest macierzą symetryczną dodatnio określoną. Funkcje macierzowe, są różniczkowalne w sposób ciągły przynajmniej do pierwszej pochodnej.

Problem sterowania, może być przedstawiony tak jak w klasycznej metodzie SDRE, z tym że $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))$.

Jeśli funkcje podcałkowe $\mathbf{x}(t)^T\mathbf{Q}\mathbf{x}(t)+\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}$ oraz $(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t)))\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}$ są różniczkowalne w sposób ciągły dla każdego argumentu, to można założyć, że $\mathbf{u} \in C[t_0, \infty]$ jest sterowaniem minimalizującym wskaźnik $J(\mathbf{u}) : C[t_0, \infty] \to \mathbb{R}_+$. W celu rozwiązania problemu, należy zdefiniować Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{x}(t)^T\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}) + \mathbf{p}^T((\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t)))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}). \quad (6.7)$$

gdzie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem zmiennych dołączonych.

Niech $\mathbf{x}(t)^T\mathbf{Q}\mathbf{x}(t)+\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}$ oraz $(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t)))\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}$ będą różniczkowalnymi w sposób ciągły funkcjami dla każdego ze swoich argumentów.

Jeśli $\mathbf{u} \in C[t_0, \infty]$ jest sterowaniem minimalizującym wskaźnik (6.6) w odniesieniu do (6.2) i jeśli $\mathbf{x}(t)$ odnosi się do odpowiadającego stanu, to istnieje takie $\mathbf{p} \in C[t_0, \infty]$ że

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{0} \quad dla \quad t \in [t_0, \infty] \quad (6.8)$$

oraz

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(t)}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad dla \quad t \in [t_0, \infty] \quad i \quad \mathbf{p}(\infty) = \mathbf{0}, \quad (6.9)$$

gdzie $\mathbf{p}$ spełnia warunki, które zapewniają uzyskanie sterowania optymalnego, minimalizującego (6.6).

Z tego wynika, że każda optymalna trajektoria wejściowa $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ i odpowiadający wektor stanu $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ spełnia (6.8) co skutkuje

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T\mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (6.10)$$

Stąd sterowanie optymalne można wyrazić przez

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}, \quad (6.11)$$

przy czym wektor kosztów sterowania jest następującej postaci

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(t)} = -\left[\mathbf{A}_1 + \frac{\partial(\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t)}{\partial \mathbf{x}(t)}\right]^T \mathbf{p} - \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \tag{6.12}$$

dla $t \in [t_0, \infty], \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{A}_2(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}_{2_0}$, oraz $\mathbf{p}(\infty) = \mathbf{0}$, gdzie

$$\frac{\partial(\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} = \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t)) + \frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)}\mathbf{x}(t). \tag{6.13}$$

Niech $\mathbf{p}$ będzie następującą kombinacją wzmocnienia w sprzężeniu zwrotnym spełniającą parametryzację (6.4)

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}_1(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t), \tag{6.14}$$

gdzie $\mathbf{K}(\mathbf{x}(t), \mathbf{K}_1(t), \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Po przekształceniu równania (6.2) otrzymuje się

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t)))\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}. \tag{6.15}$$

Po podstawieniu (6.14) do (6.15) otrzymuje się

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t). \tag{6.16}$$

Następnie szukane jest rozwiązanie $\mathbf{x}(t)$ równania (6.16) dla $t \in [t_0, \infty]$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{A}_2(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}_{2_0}$. Równanie (6.16) można zapisać, wyodrębniając część liniową oraz nieliniową w następujący sposób

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1(t))\mathbf{x}(t) + (\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t)))\mathbf{x}(t). \tag{6.17}$$

Pierwszy nawias równania (6.17) jest niezależny od stanu, drugi zaś zależny, a zatem potencjalnie istnieje możliwość linearyzacji tego równania jeśli macierz zależna od stanu $\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))$ spełnia następujący warunek:

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}. \tag{6.18}$$

Wtedy $\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))$ można wyznaczyć w następujący sposób

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t)) = \left[\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\right]^+ \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t)). \tag{6.19}$$

Macierz $\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T$ może być macierzą osobliwą, dlatego zależna od stanu macierz wzmocnień $\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))$

w takiej sytuacji, może być uzyskana jedynie w wyniku operacji pseudoinwersji $[\ldots]^{+}$. Aby dokonać tej operacji, proponuje się pseudoinversję Moore'a-Penrose'a [58, 89, 90].

Przyrównując równanie (6.12) i równanie (6.14) otrzymuje się

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\mathbf{x}(t)+[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\dot{\mathbf{x}}(t)=\\&-\left[\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))+\frac{\partial(\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t)}{\partial\mathbf{x}(t)}\right]^T[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\mathbf{x}(t)-\mathbf{Q}\mathbf{x}(t).\end{aligned}\tag{6.20}$$

Na podstawie równania (6.2) oraz (6.11) można uzyskać

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\mathbf{x}(t)+[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t)\\&+[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t)\\&-[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\mathbf{x}(t)\\&=-\left[\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))+\frac{\partial(\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t)}{\partial\mathbf{x}(t)}\right]^T[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\mathbf{x}(t)-\mathbf{Q}\mathbf{x}(t).\end{aligned}\tag{6.21}$$

Porządkując powyższe równanie (6.21) otrzymuje się

$$\begin{aligned}&\left(\dot{\mathbf{K}}_1(t)+\dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x}(t))+\left[\frac{\partial(\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t)}{\partial\mathbf{x}(t)}\right]^T[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\right)\mathbf{x}(t)\\&+([\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\mathbf{A}_1+[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\\&-[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\\&+[\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))]^T[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]+\mathbf{Q}\Big)\mathbf{x}(t)=\mathbf{0}.\end{aligned}\tag{6.22}$$

Wykorzystanie przedstawionej linearyzacji daje możliwość sformułowania następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1. *Niech macierz $\boldsymbol{K}_1(t)$ będzie rozwiązaniem równania (6.22), różniczkowego równania Riccatiego- DRE*

$$\dot{\boldsymbol{K}}_1(t)+\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{K}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}_1(t)+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{0},\tag{6.23}$$

natomiast macierz $\boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x})$ spełnia warunek (6.18), wtedy warunek optymalności jest postaci

$$
\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{K}}_2(\boldsymbol{x}(t)) + \left[\frac{\partial \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x}(t))}{\partial \boldsymbol{x}(t)}\boldsymbol{x}(t)\right]^T \boldsymbol{K}_1(t) + \left[\frac{\partial \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x}(t))}{\boldsymbol{x}(t)}\boldsymbol{x}(t)\right]^T \boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x}(t)) + \\
&\boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{A}_2^T(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{K}_1(t) + \\
&\boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{A}_2^T(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{K}_2 - \boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}_1(t) - \\
&\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x}(t)) - \boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

Dowód. Z zasady maksimum Pontryagin'a, warunki konieczne sterowania optymalnego są następujące [25, 27]

$$
\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}, \qquad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(t)}, \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \tag{6.25}
$$

gdzie H jest definiowane jako (6.7). Wykorzystując (6.7) i (6.11)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T\mathbf{p} = -\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T[\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^T\mathbf{p} \\
&= \mathbf{B}^T\left[\mathbf{p} - [\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))]\,\mathbf{x}(t)\right]
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

dla wektora kosztów postaci

$$
\mathbf{p} = \mathbf{K}_1(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t), \tag{6.27}
$$

można pokazać, że $\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$.

W związku z tym, rozwiązanie SDRE ze sprzężeniem zwrotnym, spełnia pierwszy warunek konieczny nieliniowego problemu regulacji (6.1), (6.6). Biorąc pod uwagę równanie (6.7), drugi konieczny warunek

$$
\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(t)} \tag{6.28}
$$

przekształca się w

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)}\mathbf{p} - \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \\
&= -\mathbf{A}_1^T\mathbf{p} - \left[\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t)) + \frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)}\mathbf{x}(t)\right]^T \mathbf{p} - \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \\
&= -\mathbf{A}_1^T\mathbf{p} - \left[\frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)}\mathbf{x}(t)\right]^T \mathbf{p} - {\mathbf{A}_2}^T\mathbf{p} - \mathbf{Q}\mathbf{x}(t).
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

Różniczkując (6.14) po czasie otrzymuje się

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}} &= \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}(t) = \\
&\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right]\mathbf{x}(t) + \left[\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right]\dot{\mathbf{x}}(t) \\
&= \dot{\mathbf{K}}_1(t)\mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_1(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}(t) \\
&= \dot{\mathbf{K}}_1(t)\mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_1(t)\left(\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}\right) \\
&\quad + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\left(\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}\right) \\
&= \dot{\mathbf{K}}_1(t)\mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) \\
&\quad + \mathbf{K}_1(t)\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}\mathbf{u}.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Podstawiając (6.11) można uzyskać

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}} &= \dot{\mathbf{K}}_1(t)\mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) \\
&\quad - \mathbf{K}_1(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right]\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) \\
&\quad + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right]\mathbf{x}(t).
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Przyrównując równania (6.29) oraz (6.31) otrzymuje się

$$\begin{aligned}
&- {\mathbf{A}_1}^T\mathbf{p} - \left[\frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)}\mathbf{x}(t)\right]^T\mathbf{p} - {\mathbf{A}_2}^T\mathbf{p} - \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) = \\
&\dot{\mathbf{K}}_1(t)\mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) \\
&- \mathbf{K}_1(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right]\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) \\
&+ \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right]\mathbf{x}(t).
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Wstawiając (6.27) do (6.32) uzyskuje się równanie zwierające oba wzmocnienia kompensatora

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}_1^T\left[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right]+\left[\frac{\partial\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))}{\partial\mathbf{x}(t)}\mathbf{x}(t)\right]^T\left[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right]\\
&+\mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}(t))\left[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right]+\mathbf{Q}+\dot{\mathbf{K}}_1(t)+\dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x}(t))+\mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_1\\
&+\mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))-\mathbf{K}_1(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right]\\
&+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_1+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right]\\
=&\,\mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))+\mathbf{A}_1^T\left[\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right]\\
&+\left[\frac{\partial\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))}{\partial\mathbf{x}(t)}\mathbf{x}(t)\right]^T\mathbf{K}_1(t)+\left[\frac{\partial\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))}{\partial\mathbf{x}(t)}\mathbf{x}(t)\right]^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\\
&+\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))^T\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))+\mathbf{Q}+\dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x}(t))+\mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_1\\
&+\mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))-\mathbf{K}_1(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1(t)-\mathbf{K}_1(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\\
&+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_1+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))-\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1(t)\\
&-\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))=\mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{6.33}
$$

Następnie porządkując (6.33) otrzymuje się

$$
\begin{aligned}
&\left[\quad\dot{\mathbf{K}}_1(t)+\mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_1(t)+\mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_1-\mathbf{K}_1(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1(t)-\mathbf{Q}\right]\\
+&\left[\quad\dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x}(t))+\left[\frac{\partial\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))}{\partial\mathbf{x}(t)}\mathbf{x}(t)\right]^T\mathbf{K}_1(t)+\left[\frac{\partial\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))}{\partial\mathbf{x}(t)}\mathbf{x}(t)\right]^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right.\\
&+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))+\mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))+\mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}(t))\mathbf{K}_1(t)\\
&+\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t))+\mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}(t))\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))-\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1(t)\\
&\left.-\mathbf{K}_1(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))-\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right]=\mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{6.34}
$$

Wobec (6.34) warunek (6.24) nazywany jest warunkiem koniecznym SDRE dla zmodyfikowanej metody SDRE. W związku z tym, wtedy gdy warunek ten jest spełniony, rozwiązanie układu zamkniętego spełnia wszystkie konieczne warunki pierwszego rzędu dla zasady maksimum jeśli $\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}=\mathbf{0}$ jest zawsze prawdziwe.

Jeżeli czas końcowy $t_1>0$ jest ustalony, a punkt końcowy $\mathbf{x}_1$ nie jest zadany, to zasadę maksimum Pontriagin'a należy uzupełnić o warunek transwersalności *(ang. transversality condition)*.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}(t)} - \mathbf{p}(t)\right) \partial \mathbf{x}(t) \Bigg|_{t=t_1} + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + H(t)\right) \partial t \Bigg|_{t=t_1} = \mathbf{0}, \tag{6.35}$$

gdzie $\mathbf{M} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_1)\mathbf{S}(\mathbf{x}(t_1))\mathbf{x}(t_1)$. Stąd warunek brzegowy dla DARE (*ang. Differential Algebraic Riccati Equation*) ma postać

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}(t_1))\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{0}. \tag{6.36}$$

Przywołując (6.14) otrzymuje się

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}(t_1))\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{K}(\mathbf{x}(t_1))\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}, \tag{6.37}$$

stąd

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}(t_1)) = \mathbf{K}(\mathbf{x}(t_1)). \tag{6.38}$$

Wykorzystując (6.19) można wyznaczyć

$$\mathbf{K}_1(t_1) = \mathbf{S}(\mathbf{x}(t_1)) - \left[\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\right]^+ \mathbf{A}_2(\mathbf{x}(t_1)). \tag{6.39}$$

□

Podsumowując przedstawiony wywód, sterowanie suboptymalne wynosi

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \left[\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right] \mathbf{x}(t) \tag{6.40}$$

dla wskaźnika jakości (6.6) w odniesieniu do (6.1) można znaleźć rozwiązanie niezależnego od stanu równania Riccatiego (6.22). W ogólności rozwiązanie równania (6.22) nie może być znalezione analitycznie. Jedno z podejść sugeruje wykorzystanie symbolicznych pakietów obliczeniowych, jednakże złożoność systemu może powodować trudności i wymagać przybliżania rozwiązania. Do tego celu można wykorzystać metody interpolacji lub metody wykorzystującej rozwinięcie w szereg Taylora [71].

6.2 Nowa metoda sterowania SDRE dla układów nieliniowych z nieskończonym horyzontem czasowym

Niech będzie dany nieliniowy układ dynamiczny postaci

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t), \tag{6.41}$$

gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ są odpowiednio wektorami stanu i wejścia. Wektor $\mathbf{F}(x)$ jest nieliniową funkcją klasy C^k, zaś macierz $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ jest macierzą o stałych współczynnikach, dlatego w dalszych rozważaniach będzie pomijana zależność od stanu.

Równanie (6.41) można zapisać w postaci sumy współczynników zależnych i niezależnych od stanu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{6.42}$$

gdzie

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \tag{6.43}$$

jest sumą macierzy o stałych współczynnikach i zależnej od stanu.

Tak jak w poprzednich podrozdziałach wspomniano, istnieje wiele metod parametryzacji SDC dla (6.42), każda powinna być prawdziwa dla $0 \le \alpha \le 1$ w sposób

$$\begin{aligned}
&\alpha\left[\mathbf{A}_{1,I} + \mathbf{A}_{2,I}(\mathbf{x})\right]\mathbf{x} + (1-\alpha)\left[\mathbf{A}_{1,II} + \mathbf{A}_{2,II}(\mathbf{x})\right]\mathbf{x} = \\
&\alpha\mathbf{A}_{1,I} + (1-\alpha)\mathbf{A}_{1,II} + \alpha\mathbf{A}_{2,I}(\mathbf{x}) + (1-\alpha)\mathbf{A}_{2,II}(\mathbf{x}) = \\
&\alpha\mathbf{F}_I(\mathbf{x}) + (1-\alpha)\mathbf{F}_{II}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{6.44}$$

W podobny sposób jak w rozdziale poprzednim, należy określić sterowalność układu. Trajektoria przechodzenia układu (6.42) ze stanu początkowego do końcowego nie jest sprecyzowana.W celu sformułowania łatwego obliczeniowo kryterium sterowalności, wprowadza się macierz $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ zależną od stanu, postaci

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = [\mathbf{B} \quad (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}))\mathbf{B} \quad \ldots \quad (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}))^{n-1}\mathbf{B}]. \tag{6.45}$$

Jeśli macierz $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ (w tym wypadku zależna od stanu) jest pełnego rzędu, to system jest sterowalny dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. W praktyce, należy wybrać taką parametryzację, która zapewni macierzy $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ pełen rząd dla całego obszaru sterowania.

Tak jak w klasycznej metodzie SDRE, należy znaleźć sterowanie dopuszczalne $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, które minimalizuje wskaźnik jakości [5, 23, 79, 80]

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})dt, \tag{6.46}$$

gdzie $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest symetryczną dodatnią półokreśloną macierzą, zaś $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ jest macierzą symetryczną dodatnio określoną. Macierze te, są różniczkowalne w sposób ciągły przynajmniej do pierwszej pochodnej. Problem sterowania, może być przedstawiony tak jak w klasycznej metodzie SDRE, z tym że $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x})$.

Jeśli funkcje podcałkowe $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}$ oraz $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}))\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ są różniczkowalne w sposób ciągły dla każdego argumentu, to można założyć, że $\mathbf{u} \in C[t_0, \infty]$ jest sterowaniem minimalizującym wskaźnik $J(\mathbf{u}) : C[t_0, \infty] \to \mathbb{R}_+$. W celu rozwiązania problemu, należy zdefiniować Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}) + \mathbf{p}^T((\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}))\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}). \tag{6.47}$$

gdzie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem zmiennych dołączonych.

Niech $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}$ oraz $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}))\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ będą ciągle różniczkowalnymi funkcjami dla każdego ze swoich argumentów. Jeśli $\mathbf{u} \in C[t_0, \infty]$ jest sterowaniem minimalizującym wskaźnik (6.46) w odniesieniu do (6.42) i jeśli $\mathbf{x}$ odnosi się do odpowiadającego stanu, to istnieje takie $\mathbf{p} \in C[t_0, \infty]$ że

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{0} \quad dla \quad t \in [t_0, \infty] \tag{6.48}$$

oraz

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad dla \quad t \in [t_0, \infty] \quad i \quad \mathbf{p}(\infty) = \mathbf{0}, \tag{6.49}$$

gdzie $\mathbf{p}$ spełnia warunki, które zapewniają uzyskanie sterowania optymalnego minimalizującego (6.46).

Z tego wynika, że każda optymalna trajektoria wejściowa $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ i odpowiadający wektor stanu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ spełnia (6.48), co skutkuje że

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T\mathbf{p} = \mathbf{0}. \tag{6.50}$$

Stąd sterowanie optymalne ma postać

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}, \tag{6.51}$$

a wektor kosztów sterowania

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\left[\mathbf{A}_1 + \frac{\partial(\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \mathbf{p} - \mathbf{Q}\mathbf{x}, \tag{6.52}$$

dla $t \in [t_0, \infty], \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{A}_2(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}_{2_0}$, oraz $\mathbf{p}(\infty) = \mathbf{0}$ gdzie

$$\frac{\partial(\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}. \tag{6.53}$$

Niech $\mathbf{p}$ będzie kombinacją liniową i nieliniową wzmocnienia w sprzężeniu zwrotnym spełniającą parametryzację (6.44)

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{K}_1(t)\mathbf{x} + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}, \tag{6.54}$$

gdzie $\mathbf{K}(\mathbf{x}), \mathbf{K}_1(t), \mathbf{K}_2(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Po przekształceniu równania (6.42) otrzymuje się

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}. \tag{6.55}$$

Natomiast $\mathbf{x}$ będzie rozwiązaniem nieliniowego równania stanu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} \tag{6.56}$$

dla $t \in [t_0, \infty], \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{A}_2(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}_{20}$.

Równanie (6.56) można zapisać, wyodrębniając części liniową oraz nieliniową w następujący sposób:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1)\mathbf{x} + (\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}))\mathbf{x}. \tag{6.57}$$

Pierwszy składnik równania (6.57) jest niezależny od stanu, drugi zaś zależny, a zatem istnieje możliwość linearyzacji i rozwiązania macierzy wzmocnień zależnej od stanu- $\mathbf{K}_2(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \tag{6.58}$$

Wtedy można wyznaczyć $\mathbf{K}_2(\mathbf{x})$ w następujący sposób

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\right]^+ \mathbf{A}_2(\mathbf{x}). \tag{6.59}$$

Podobnie jak w przypadku zmodyfikowanej metody SDRE dla skończonego horyzontu czasowego, macierz $\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T$ może być macierzą osobliwą, dlatego zależna od stanu macierz wzmocnień $\mathbf{K}_2(\mathbf{x})$ w takiej sytuacji, może

być uzyskana jedynie w wyniku operacji pseudoinversji $[\ldots]^+$.
Aby dokonać tej operacji, proponuje się pseudoinversję Moore'a-Penrose'a. Metoda ta gwarantuje jednoznacznośc przekształcenia pseudoodwrotnego [58, 89, 90].

Przyrównując równanie (6.52) i równanie (6.54) otrzymuje się

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\mathbf{x} + [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\dot{\mathbf{x}} = \\ &-\left[\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) + \frac{\partial(\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\mathbf{x} - \mathbf{Q}\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{6.60}$$

Biorąc pod uwagę równania (6.44) oraz (6.51) można uzyskać

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\mathbf{x} + [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\mathbf{A}_1\mathbf{x} + [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} \\ &- [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\mathbf{x} \\ = &-\left[\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) + \frac{\partial(\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\mathbf{x} - \mathbf{Q}\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{6.61}$$

Porządkując równanie (6.62) otrzymuje się

$$\begin{aligned} &\left(\dot{\mathbf{K}}_1 + \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x}) + \left[\frac{\partial(\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\right)\mathbf{x} \\ &+ ([\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\mathbf{A}_1 + [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \\ &- [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})] \\ &+ [\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x})]^T[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})] + \mathbf{Q}\Big)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{6.62}$$

Podobnie jak w przypadku przedstawionym w poprzednim rozdziale, można sformułować następujące twierdzenie

Twierdzenie 1. *Niech macierz $\boldsymbol{K}_1$ będzie rozwiązaniem równania (6.62), algebraicznego równania Riccatiego- ARE*

$$\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_1 + {\boldsymbol{A}_1}^T\boldsymbol{K}_1 - \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}, \tag{6.63}$$

oraz macierz $\boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x})$ spełnia warunek (6.58), wtedy warunek optymalności jest postaci

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{K}}_2(\boldsymbol{x}) + \left[\frac{\partial \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}\right]^T \boldsymbol{K}_1 + \left[\frac{\partial \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}\right]^T \boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x}) \\ &+ \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}_2^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}_2^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{K}_2 \\ &- \boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}_1 - \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{6.64}$$

Dowód. Z zasady maksimum Pontryagin'a, warunki konieczne sterowania optymalnego są następujące [25, 27]

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}, \qquad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \qquad \dot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \tag{6.65}$$

gdzie H jest definiowane jako (6.47). Wykorzystując (6.47) i (6.51)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T\mathbf{p} = -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\mathbf{x} + \mathbf{B}^T\mathbf{p} \\ &= \mathbf{B}^T\left[\mathbf{p} - [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})]\,\mathbf{x}\right], \end{aligned} \tag{6.66}$$

wektor dodatkowy spełnia

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}_1(t)\mathbf{x} + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}. \tag{6.67}$$

Oznacza to, że podstawiając $\mathbf{p}$ do równania (6.66) otrzymuje się
$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$.

W związku z tym, rozwiązanie SDRE ze sprzężeniem zwrotnym, spełnia pierwszy warunek konieczny nieliniowego problemu regulacji (6.41, 6.46). Biorąc pod uwagę równanie (6.47), drugi konieczny warunek

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \tag{6.68}$$

przekształca się w

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{p} - \mathbf{Q}\mathbf{x} = -\mathbf{A}_1^T\mathbf{p} - \left[\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}\right]^T\mathbf{p} - \mathbf{Q}\mathbf{x} \\ &= -\mathbf{A}_1^T\mathbf{p} - \left[\frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}\right]^T\mathbf{p} - \mathbf{A}_2^T(\mathbf{x})\mathbf{p} - \mathbf{Q}\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{6.69}$$

Różniczkując (6.54) względem czasu otrzymuje się następujące równanie

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\right]\mathbf{x} + \left[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\right]\dot{\mathbf{x}} \\ &= \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}_1\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \\ &= \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}_1\left(\mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}\right) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\left(\mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}\right) \\ &= \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{A}_1\mathbf{x} \\ &\quad + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{6.70}$$

Z kolei podstawiając (6.51) można uzyskać

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\right]\mathbf{x} \\ + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\right]\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{6.71}$$

Przyrównując równania (6.69) oraz (6.71) otrzymuje się

$$\begin{aligned}&- \mathbf{A}_1^T\mathbf{p} - \left[\frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}\right]^T\mathbf{p} - \mathbf{A}_2^T\mathbf{p} - \mathbf{Q}\mathbf{x} \\ &= \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\right]\mathbf{x} \\ &\quad + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\right]\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{6.72}$$

Wstawiając (6.67) do (6.72) uzyskuje się równanie zwierające oba wzmocnienia kompensatora

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}_1^T\left[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\right] + \left[\frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}\right]^T\left[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\right] + \mathbf{A}_2^T\left[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\right] \\ &\quad + \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\right] \\ &\quad + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{A}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\right] \\ &= \mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_1 + \mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_1^T\left[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\right] + \left[\frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}\right]^T\mathbf{K}_1 \\ &\quad + \left[\frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}\right]^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x})^T\mathbf{K}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x})^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x}) \\ &\quad + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) \\ &\quad + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{A}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1 \\ &\quad - \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{6.73}$$

Aby uzyskać wozwiązanie dla $\mathbf{K}_1$, należy uporządkować powyższe równanie, co pozwoli wyodrębnić równanie Riccatiego

$$\begin{aligned}&\Big[\mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_1 - \mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1 + \mathbf{Q}\Big] \\ &+ \Bigg[\quad \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x}) + \left[\frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}\right]^T\mathbf{K}_1 + \left[\frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}\right]^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) \\ &+\mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_2^T(\mathbf{x})\mathbf{K}_1 \\ &+\mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_2^2(\mathbf{x})\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1 \\ &-\mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x})\Big] = \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{6.74}$$

Niech $\mathbf{K}_1$ będzie rozwiązaniem zależnego od stanu równania Riccatiego

$$\mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_1 - \mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1 + \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{6.75}$$

z warunkiem optymalności

$$\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{x}) + \left[\frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}\right]^T \mathbf{K}_1 + \left[\frac{\partial \mathbf{A}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}\right]^T \mathbf{K}_2(\mathbf{x}) \\
&+ \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_2^T(\mathbf{x})\mathbf{K}_1 \\
&+ \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_2^T(\mathbf{x})\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1 \\
&- \mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{K}_2(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{6.76}$$

Wobec (6.74), warunek (6.64) nazywany jest warunkiem koniecznym SDRE dla zmodyfikowanej metody SDRE. Gdy warunek ten jest spełniony, rozwiązanie układu zamkniętego spełnia wszystkie konieczne warunki dla zasady maksimum jeśli $\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$ jest zawsze prawdziwe [25, 27]. □

Stąd, sterowanie suboptymalne ma postać

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}(t))\right]\mathbf{x}. \tag{6.77}$$

Dla wskaźnika jakości (6.46) w odniesieniu do (6.41) można znaleźć rozwiązanie niezależnego od stanu równania Riccatiego (6.62), podobnie jak dla typowych metod SDRE. W ogólności rozwiązanie równania (6.62) nie może być znalezione analitycznie. Jedno z podejść sugeruje wykorzystanie symbolicznych pakietów obliczeniowych, jednakże złożoność systemu może powodować trudności i wymagać przybliżania rozwiązania.
Do tego celu można wykorzystać metody interpolacji lub rozwinięcia w szereg Taylora [71].

Rozdział 7

Analiza stabilności proponowanej metody SDRE

7.1 Stabilność lokalna asymptotyczna

W tym rozdziale rozpatrzono analizę stabilności asymptotycznej systemu w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego, opisanego nieliniowym zależnym od stanu równaniem

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1(t))\mathbf{x} + (\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}))\mathbf{x}. \qquad (7.1)$$

Stabilność systemu wiąże się z możliwością zachowania określonego stanu [64]. System sterowania z kompensatorem SDDRE (*ang. State Dependent Differential Riccati Equation*) w sprzężeniu zwrotnym jest asymptotycznie lokalnie stabilny.

7.1.1 Proponowana metoda SDRE ze skończonym horyzontem czasowym

W ogólności, stabilność asymptotyczna definiowana jest dla systemów z nieskończonym horyzontem czasowym, podczas gdy dla skończonego horyzontu czasowego czas końcowy jest ograniczony. Jednakże, można odnieść definicję stabilności asymptotycznej do problemu ze skończonym horyzontem czasowym, w tym sensie, że wraz z rozszerzaniem horyzontu czasowego, stany zbiegają do rozwiązania ustalonego [59, 91].

7.1.2 Proponowana metoda SDRE z nieskończonym horyzontem czasowym

Niech $r > 0$ będzie największym promieniem, takim że $\mathbb{B}_r(0) \subseteq \Omega$. Zakładając, że system jest stabilizowalny w punkcie $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ można użyć twierdzeń sterowania LQR do zdefiniowania macierzy $\mathbf{K}_1$ takiej, że wszystkie wartości własne macierzy $(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}\mathbf{K}_1)$ mają ujemne części rzeczywiste. To powoduje, że istnieje $\beta > 0$, takie że $Re(\mathbf{p}) < -\beta$ dla wszystkich wartości własnych $\mathbf{p}$ dla $(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}\mathbf{K}_1)$.

Mając dany system (7.1), w którym $(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2(\mathbf{x}))\mathbf{x}$ oraz $\dfrac{\partial(\mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ są ciągłe względem $\mathbf{x}$ dla $||\mathbf{x}||< r$, gdzie $r > 0$ jest największym promieniem w pewnym niepustym otoczeniu początku $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Niech

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{B}\mathbf{K}_2(\mathbf{x}), \tag{7.2}$$

zaś $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{x}$, wtedy system przyjmuje postać

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}\mathbf{K}_1)\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}). \tag{7.3}$$

Szacowanie $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ wykazuje, że ma się do czynienia z prawie liniowym systemem spełniającym, gdyż

$$\lim_{||\mathbf{x}|| \to 0} \frac{||\mathbf{h}(\mathbf{x})||}{||\mathbf{x}||} = 0. \tag{7.4}$$

To zaś wynika wprost z nierówności

$$||\mathbf{h}(\mathbf{x})|| \le ||\mathbf{g}(\mathbf{x})||\, ||\mathbf{x}|| = ||\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{B}\mathbf{K}_2(\mathbf{x})||\, ||\mathbf{x}||\,. \tag{7.5}$$

Tak więc $||\mathbf{g}(\mathbf{x})|| \to 0$, gdy $||\mathbf{x}|| \to 0$, stąd $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ spełnia warunek (7.4). Rozważania teoretyczne na prawie liniowych systemach pozwalają wysnuć wniosek, że jeśli wartości własne $(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}\mathbf{K}_1)$ mają ujemne części rzeczywiste, $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ jest ciągłe w otoczeniu początku, oraz spełniony jest warunek (7.4), wtedy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ jest asymptotycznie stabilny [69].

Niech będzie dane $\delta > 0$, wtedy istnieje takie $\hat{\eta} \in (0, r)$, że $||\mathbf{h}(\mathbf{x})|| \le \delta\, ||\mathbf{x}||$, zawsze gdy $||\mathbf{x}|| \le \hat{\eta}$. Niech $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{B}_{\hat{\eta}}(0)$, z założenia o ciągłości funkcji f, rozwiązanie istnieje i zawiera się w $\mathbb{B}_{\hat{\eta}}(0)$ dla $t \in [0, \infty]$, wtedy

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}\mathbf{K}_1)t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}\mathbf{K}_1)(t-s)}\mathbf{h}(\mathbf{x}(s))ds. \tag{7.6}$$

Rozważając szacowanie normy stanu przy założeniu, że $||\mathbf{x}(t)||< \hat{\eta}$ można zapisać następujące ograniczenie

$$\begin{gathered}||\mathbf{x}(t)|| \leq \left|\left|e^{(\mathbf{A}_1-\mathbf{BK}_1)t}\right|\right| ||\mathbf{x}(0)|| + \\ \delta \int_0^t \left|\left|e^{(\mathbf{A}_1-\mathbf{BK}_1)(t-s)}\right|\right| ||\mathbf{x}(s)||\, ds.\end{gathered} \tag{7.7}$$

Istnieje dodatnie stałe G i β takie, że

$$\left|\left|e^{(\mathbf{A}_1-\mathbf{BK}_1)t}\right|\right| \leq Ge^{-\beta t} \tag{7.8}$$

taka, że

$$||\mathbf{x}(t)|| \leq Ge^{-\beta t} ||\mathbf{x}(0)|| + \delta G \int_0^t e^{-\beta(t-s)} ||\mathbf{x}(s)||\, ds. \tag{7.9}$$

Stosując nierówność Gronwalla i mnożąc obustronnie przez $e^{\beta t}$ uzyskuje się

$$||\mathbf{x}(t)|| \leq G\, ||\mathbf{x}(0)||\, e^{-(\beta-\delta\mathbf{G})t} \tag{7.10}$$

dla wszystkich $t > 0$, takich że $||\mathbf{x}(t)|| < \hat{\eta}$. Wybór δ dokonywany jest z przedziału $\delta \in (0, \frac{\beta}{G})$, wtedy w odniesieniu do $\hat{\eta}$ mając $\gamma \in (0, \hat{\eta})$ można wybrać takie $\eta = \min\{\hat{\eta}, \frac{\gamma}{G}\}$. Wtedy dla $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{B}_\eta$, uzyskuje się $||\mathbf{x}(t)|| < \gamma \leq \hat{\eta}$ dla wszystkich $t > 0$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ jest stabilny.

Warunek (7.10) jest spełniony dla wszystkich $t > 0$ jeśli $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{B}_\eta$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ jest asymptotycznie stabilny dopóki $\beta - \delta G > 0$ [64].

Przykład 2. *W tej części rozważa się prosty przykład zaczerpnięty z [64, 92], który posiada dokładne rozwiązanie. Jest on szczególnie interesujący ze względu na to, że prezentowana w [93] metoda numeryczna zawiodła w przypadku wyznaczenia sterowania stabilizującego bazującego na przybliżeniu rozwiązania SDRE.*

Wskaźnik jakości sterowania w rozważanym problemie ma postać

$$J(\boldsymbol{x}_0, u) = \int\limits_{t_0}^{\infty} \left(\boldsymbol{x}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \frac{1}{2}u^2 \right) dt, \tag{7.11}$$

natomiast nieliniowa dynamika stanu przedstawia się w następujący sposób

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \tag{7.12}$$

Macierz stanu $\boldsymbol{A}$ *o stałych współczynnikach, oraz macierz zależna od stanu* $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ *są postaci*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.13}$$

Macierz wejścia $\boldsymbol{B}$ *jest macierzą o stałych współczynnikach. Powyższa parametryzacja zapewnia zależną od stanu macierz sterowalności postaci*

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.14}$$

która to jest macierzą pełnego rzędu dla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$*. Wtedy, parametryzacja SDC zapewnia sterowalność pary* $(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{B})$ *dla wszystkich* $\boldsymbol{x}$*, a także para* $(\boldsymbol{Q}^{1/2}, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))$ *jest obserwowalna dla wszystkich* $\boldsymbol{x}$*. W związku z tym, można założyć, że rozwiązanie SDRE może być wykorzystane do zaproponowania lokalnie stabilizowalnego sterowania suboptymalnego. SDRE dla tej parametryzacji SDC przedstawia się w następujący sposób*

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x_1^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}, \tag{7.15}$$

macierz $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$ *jest macierzą symetryczną. Rozwiązanie zależnego od stanu równania Riccati'ego wynosi*

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \sqrt{x_1^4+1}\left(\sqrt{\frac{x_1^2+\sqrt{x_1^4+1}}{2}+\frac{1}{4}}\right) & \frac{x_1^2+\sqrt{x_1^4+2}}{2} \\ \frac{x_1^2+\sqrt{x_1^4+2}}{2} & \sqrt{\frac{x_1^2+\sqrt{x_1^4+1}}{2}+\frac{1}{4}} \end{bmatrix}. \tag{7.16}$$

Zadając zerowy stan, rozwiązanie SDRE sprowadza się do

$$\boldsymbol{K}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

i $\boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{K}_1$*. Dla tego przykładu, wartości własne zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego są równe* $-0.866 \pm 0.5i$*.*

Zakładając $G = 4$, a $\beta = 0.866$ można znaleźć ograniczenie dla nierówności $||\boldsymbol{x}(t)|| \leq Ge^{-\beta t}\, ||\boldsymbol{x}(0)|| + \delta G \int_0^t e^{-\beta(t-s)}\, ||\boldsymbol{x}(s)||\, ds$. Definiując krzywą postaci $y = 4g(x) - |Re(\lambda)|$ skorzystano z $||\cdot||_2$ normy dla g. To daje obraz obszaru, z którego można wybrać warunki początkowe, tak, aby $\beta - \delta G > 0$. Aproksymując miejsca zerowe funkcji y można zauważyć, że $|x_1| \leq 0.31$, co zapewnia wartości ujemne dla $\beta - \delta G$. Wtedy warunek początkowy zapewnia wykładniczą zbieżność do zera. Możliwe jest w tym przykładzie udowodnienie, że region atrakcji dla $x = 0$ jest znacznie większy. Rozważanie innych warunków początkowych, np. $\boldsymbol{x}_0 = (1, -1)^T$ czy $\boldsymbol{x}_0 = (5, 0)^T$ nie wpływa na zbieżność układu do zera- dalej zbiega on asymptotycznie.

7.2 Stabilność globalna

Uzyskiwanie informacji o stabilności punktów równowagi nie rozwiązując równań stanu, dostarczają efektywne metody analizy stabilności. Stwierdzanie stabilności wykorzystujące metody analityczne wymaga wprowadzania pomocniczych funkcjonałów, które uzupełniają w sposób pośredni informacje na temat zachowania się układu i trajektorii. To z kolei jest podstawą metody funkcjonałów Lyapunova zwanej również drugą metodą Lyapunova. Jest ona najbardziej efektywną i najczęściej stosowaną metodą analizy stabilności.

7.2.1 Proponowana metoda SDRE ze skończonym horyzontem czasowym

Rozważa się prawo sterowania, które jest postaci

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}))\mathbf{x} \tag{7.18}$$

i w którym $\mathbf{K}_1(t)$ spełnia DRE(*ang. Differential Riccati Equation*)

$$\dot{\mathbf{K}}_1(t) + \mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_1 - \mathbf{K}_1(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{7.19}$$

natomiast $\mathbf{K}_2(\mathbf{x})$ uzyskiwane jest z

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) = [\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T]^{+}\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \tag{7.20}$$

z warunkiem końcowym

$$\mathbf{K}_1(t_1) = \mathbf{S}(\mathbf{x}(t_1)). \tag{7.21}$$

Wtedy system w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1(t))\mathbf{x} + (\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}))\mathbf{x} \tag{7.22}$$

jest globalnie asymptotycznie stabilny jeśli $\mathbf{K}_1(t)$ jest symetryczną dodatnio określoną macierzą.

Zakładając funkcję Lyapunova $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{K}_1\mathbf{x}$, która

$$k_1\|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq k_2\|\mathbf{x}\|^2 \tag{7.23}$$

dla $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$, gdzie $\mathbb{U}$ jest podzbiorem $\mathbb{R}^n$ zawierającym początek, zaś stałe k_1 oraz k_2 wyznacza się z

$$k_1 = \inf \sigma_i(\mathbf{K}_1(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{Q}) \tag{7.24}$$

oraz

$$k_2 = \sup \sigma_i(\mathbf{K}_1(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{Q}) \tag{7.25}$$

dla $i = 1, 2, , ..., n$ gdzie i-ta wartość własna macierzy definiowana jest przez σ_i.
Pochodna zaproponowanej funkcji Lyapunova jest postaci

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{K}_1(t)\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\dot{\mathbf{K}}_1(t)\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{K}_1(t)\dot{\mathbf{x}}. \tag{7.26}$$

Korzystając z (7.22) pochodną (7.26) można zapisać następująco

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{K}_1(t)\mathbf{A}_1 - 2\mathbf{K}_1(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1 + \dot{\mathbf{K}}_1(t))\mathbf{x}. \tag{7.27}$$

Następnie, po uwzględnieniu (7.19) otrzymuje się

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(-\mathbf{K}_1(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1(t) - \mathbf{Q})\mathbf{x}. \tag{7.28}$$

Dalej, można wyznaczyć ograniczenie

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -k_3\|\mathbf{x}\|^2 \tag{7.29}$$

gdzie

$$k_3 = \inf \sigma_i(\mathbf{K}_1(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1(t) + \mathbf{Q}) \tag{7.30}$$

dla $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ oraz $i = 1, 2, ..., n$.

W ogólnym przypadku sterowania SDRE ze skończonym horyzontem czasowym, jak opisano wcześniej, istnienie stałych k_1, k_2, k_3 nie gwarantuje stabilności globalnej. Macierz sprzężenia zwrotnego jest zależna od stanu i uogólnienie do globalnej stabilności może być zapewnione poprzez zdefiniowanie regionu atrakcji jak w [59].

W proponowanej metodzie, istnienie stałych k_1, k_2, k_3 przedstawionych w (7.24, 7.25, 7.30) gwarantuje stabilność globalną, gdyż macierz $\mathbf{K}_1(t)$ jest niezależna od stanu. W takim wypadku nie ma potrzeby definiowania regionu atrakcji dla rozwiązania równania Riccatiego (7.19).

7.2.2 Proponowana metoda SDRE z nieskończonym horyzontem czasowym

Zakładając, że parametryzacja SDC jest stabilizowalna i wykrywalna dla wszystkich $\mathbf{x}(t)$, wtedy macierz $\mathbf{A}_{CL}$ zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego jest symetryczna dla wszystkich $\mathbf{x}(t)$, a rozwiązanie SDRE jest asymptotycznie stabilne, gdy $t \in [0, \infty]$.

Niech prawo sterowania dane będzie w następującej postaci

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{x}))\mathbf{x}, \tag{7.31}$$

przy czym $\mathbf{K}_1$ spełnia ARE

$$\mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_1 - \mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1 + \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{7.32}$$

natomiast $\mathbf{K}_2(\mathbf{x})$ uzyskiwane jest z

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{x}) = [\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T]^+\mathbf{A}_2(\mathbf{x}). \tag{7.33}$$

Wtedy system w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1)\mathbf{x} + (\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_2(\mathbf{x}))\mathbf{x} \tag{7.34}$$

jest globalnie asymptotycznie stabilny jeśli $\mathbf{K}_1$ jest symetrycznie dodatnio określona.

Przyjmuje się funkcję Lyapunova

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{K}_1\mathbf{x} \tag{7.35}$$

i wiedząc, że $V(\mathbf{x} > 0)$ dopóki $\mathbf{K}_1 > 0$ oraz

$$k_1\|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq k_2\|\mathbf{x}\|^2 \tag{7.36}$$

dla $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$, gdzie $\mathbb{U}$ jest podzbiorem $\mathbb{R}^n$ zawierającym początek, zaś stałe k_1 oraz k_2 wyznacza się z

$$k_1 = \inf\sigma_i(\mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1 + \mathbf{Q}) \tag{7.37}$$

oraz

$$k_2 = \sup\sigma_i(\mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1 + \mathbf{Q}) \tag{7.38}$$

dla $i = 1, 2, , ..., n$ gdzie i-ta wartość własna macierzy definiowana jest przez σ_i.

Korzystając ze wzoru (7.34) oraz (7.32) uzyskuje się

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\dot{\mathbf{K}}_1\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{K}_1\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{K}_1\mathbf{x}. \tag{7.39}$$

Podstawiając zaś równanie (7.34), uwzględniając, że $\mathbf{K}_2(\mathbf{x})$ linearyzuje system oraz że rozwiązanie ARE, $\mathbf{K}_1$ jest zawsze symetryczne, otrzymuje się

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \left[\mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_1\mathbf{A}_1 - 2\mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1 + \dot{\mathbf{K}}_1\right]\mathbf{x}. \tag{7.40}$$

Następnie po podstawieniu (7.32) można zapisać

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \left[-\mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1 + \dot{\mathbf{K}}_1 - \mathbf{Q}\right]\mathbf{x}. \tag{7.41}$$

W kolejnym kroku, można znaleźć następujące ograniczenie

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -k_3\|\mathbf{x}\|^2, \tag{7.42}$$

gdzie k_3

$$k_3 = \inf\sigma_i(\mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1 - \dot{\mathbf{K}}_1 + \mathbf{Q}) \tag{7.43}$$

dla $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ oraz $i = 1, 2, ..., n$.

W ogólnym przypadku sterowania SDRE z nieskończonym horyzontem czasowym, jak opisano wcześniej, istnienie stałych k_1, k_2, k_3 nie gwarantuje stabilności globalnej. Macierz sprzężenia zwrotnego jest zależna od stanu i uogólnienie do globalnej stabilności może być zapewnione poprzez zdefiniowanie regionu atrakcji [59].

W proponowanej metodzie , istnienie stałych k_1, k_2, k_3 przedstawionych w (7.37, 7.38, 7.43) gwarantuje stabilność globalną, gdyż macierz $\mathbf{K}_1$ jest niezależna od stanu. W takim wypadku nie ma potrzeby definiowania regionu atrakcji dla równania Riccatiego (7.32).

Rozdział 8

Metody rozwiązywania równań Riccatiego

Istnieją dwie grupy numerycznego rozwiązywania równań Riccatiego. Pierwsza z nich polega na znalezieniu stabilnego rozwiązania równania Riccatiego z macierzy Hamiltona, która zapewnia znalezienie rozwiązania. Druga zaś, bazując na iteracji pozwala na wyznaczenie rozwiązania opierając się o wstępne założenia wynikające z charakterystyki układu.

Wyszczególnione poniżej algorytmy zostały wybrane uwzględniając kryterium niewielkiej złożoności i zbieżności. Ich złożoność jest klasy $O(n^3)$, zaś zbieżnośc jest kwadratowa (inne algorytmy wykazują zbieżność liniową [94]). Opis poszczególnych algorytmów został zaczerpnięty z pracy [95].

8.1 Rozkład w szereg Taylora

Rozkład w szereg Taylora może być używany dla systemów postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{8.1}$$

w których $\mathbf{B}$ jest stałe. Dla stałych macierzy współczynników, oraz macierzy $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ wynikających z funkcjonału kosztu, równanie Riccatiego przyjmuje następującą postać

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \tag{8.2}$$

Korzystając z metody opisanej w [64] macierz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ przedstawia się jako sumę macierzy stałej oraz macierzy inkrementalnej

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{A}} + \epsilon\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}). \tag{8.3}$$

Rozwinięcie rozwiązania równania Riccatiego w szereg Taylora ma postać

$$\mathbf{K}(\mathbf{x},\epsilon) = \mathbf{K}(\mathbf{x})|_{\epsilon=0} + \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\epsilon + \frac{\partial^2 \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial \epsilon^2}\bigg|_{\epsilon=0}\frac{\epsilon^2}{2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n L_n(\mathbf{x}), \tag{8.4}$$

przy czym każda macierz L_n jest symetryczna w wyniku symetrii $\mathbf{K}(\mathbf{x})$.

Podstawiając (8.4) do (8.2) uzyskuje się

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n L_n(\mathbf{x})\right)(\hat{\mathbf{A}} + \epsilon\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x})) + (\hat{\mathbf{A}} + \epsilon\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}))^T\left(\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n L_n(\mathbf{x})\right)\\ &-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n L_n(\mathbf{x})\right)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left(\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n L_n(\mathbf{x})\right) + \mathbf{Q} = \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{8.5}$$

Grupując według potęg ϵ i przyrównując ten współczynnik do 0, uzyskuje się iteracyjną metodę poszukiwania macierzy L_n. Schemat postępowania przedstawiony jest poniżej:

$$L_0\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}}^T L_0 - L_0\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T L_0 + \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{8.6}$$

$$L_1(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T L_0) + (\hat{\mathbf{A}}^T - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T L_0)L_1 + L_0\Delta\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}L_0 = \mathbf{0}. \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned}&L_n(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T L_0) + (\hat{\mathbf{A}}^T - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T L_0)L_n + L_{n-1}\Delta\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}^T L_{n-1}\\ &-\sum_{k=1}^{n-1} L_k\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T L_{n-k} = \mathbf{0}\end{aligned} \tag{8.8}$$

Równanie (8.6) jest algebraicznym równaniem Riccatiego (ARE) zaś równania (8.7) oraz (8.8) są zależnymi od stanu równaniami Lyapunova. Algorytm ten lokalnie zbiega do rozwiązania równania SDRE pod warunkiem ciągłości macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ oraz $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ [23]. Powyższy układ równań może zostać uproszczony jeśli przyjmie się, że $\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\Delta\mathbf{A}_C$, przy czym $\Delta\mathbf{A}_C$ jest macierzą o stałych współczynnikach.

Można wtedy zdefiniować

$$L_n(\mathbf{x}) = (g(\mathbf{x}))^n (L_n)_C. \tag{8.9}$$

Mając macierz $(L_n)_C$ o stałych współczynnikach, uzyskuje się uproszczony układ równań

$$\begin{aligned}
&L_0\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}}^T L_0 - L_0\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T L_0 + \mathbf{Q} = \mathbf{0},\\
&(L_1)_C(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T L_0) + (\hat{\mathbf{A}}^T - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T L_0)(L_1)_C + L_0\Delta\mathbf{A}_C +\\
&\Delta\mathbf{A}_C L_0 = \mathbf{0}\\
&(L_n)_C(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T L_0) + (\hat{\mathbf{A}}^T - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T L_0)(L_n)_C + (L_{n-1})_C\Delta\mathbf{A} +\\
&\Delta\mathbf{A}^T (L_{n-1})_C - \sum_{k=1}^{n-1}(L_k)_C\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(L_{n-k})_C = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Wtedy można użyć aproksymacji $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ wykorzystując macierze o stałych współczynnikach, obliczone offline, po rozwiązaniu stałego ARE oraz równań Lyapunova.

Wtedy prawo sterowania przyjmuje postać

$$\mathbf{u}^N(\mathbf{x}) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left(\sum_{n=0}^{N}((g(\mathbf{x}))^n(L_n)_C)\right)\mathbf{x}, \tag{8.11}$$

gdzie N jest liczbą składowych szeregu.

Warto podkreślić, że zastosowanie dekompozycji macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ na sumę macierzy stałej oraz macierzy inkrementalnej, stanowi podobną propozycję, do tej przedstawionej w Rozdziale 6 i pozwoliłoby w łatwy sposób zaimplementować tę metodę do rozwiązania problemu sterowania, ze zmianami wprowadzonymi w strukturach macierzy proponowanych przez autorkę.

8.2 Metoda interpolacji

Metoda interpolacji nawiązująca do [25] oraz [64], wymaga sformułowania prawa sterowania dla SDRE, rozwiązania równania SDRE, a także macierzy wzmocnień dla liczby stanów w dziedzinie oraz stworzenia siatki pozwalającej na interpolację podczas zmiany stanów.

Niech Ω_0 będzie zbiorem, z którego zostaną wybrane warunki początkowe. Zakłada się, że przestrzeń stanu Ω jest taka, że trajektoria stanu dla każdego z wybranych warunków początkowych ($\mathbf{x}_0 \in \Omega_0$) zawiera się w pełni w Ω. Jeśli n jest wymiarem wektora stanu, określa się siatkę D, która pozwala na zmianę każdego $\mathbf{x}_i, i = 1, \ldots, n$ w Ω. W każdym $\hat{\mathbf{x}} \in D$ rozwiązuje się i zachowuje wynik sterowania $\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{x}}}$. W ten sposób tworzy się siatka interpolacji pozwalająca na oszacowanie sterowania w każdym punkcie Ω. Sterowanie można przedstawić w sposób

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathrm{interp}\{\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{x}}}\}, \tag{8.12}$$

gdzie interp$\{\cdot\}$ oznacza dowolną interpolację (liniową, 1-d, 2-d, itd).

W parametryzacji SDC, liczba zmiennych stanu, od których zależy $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ oraz $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ jest zazwyczaj mniejsza niż wymiar systemu. Niech Ω_0 oraz Ω, będą zdefiniowane jak powyżej. Jeśli n jest rozmiarem wektora stanu, to definiuje się $r \leq n$ stanów przedstawionych w $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ jako $\Xi = \{\mathbf{x}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_r}\}$. Jeśli zostanie utworzona siatka, D zmieniającą się przy każdym $\mathbf{x}_{i_j} \in \Xi$ w granicach wyznaczonych przez Ω, rozwiązując i zachowując wyniki SDRE dla każdego $\mathbf{x} \in D$ można zdefiniować siatkę interpolacji dla każdego $\mathbf{K}(\mathbf{x})$. Wtedy, w celu oszacowania rozwiązania dla SDRE w każdym punkcie Ω, można interpolować elementy siatki. Możliwe jest przybliżenie sterowania z wykorzystaniem

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \mathrm{interp}\{\mathbf{K}_{11}(\mathbf{x})\} & \cdots & \mathrm{interp}\{\mathbf{K}_{1n}(\mathbf{x})\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{interp}\{\mathbf{K}_{n1}(\mathbf{x})\} & \cdots & \mathrm{interp}\{\mathbf{K}_{nn}(\mathbf{x})\} \end{bmatrix}, \tag{8.13}$$

interp$\{\cdot\}$ zdefiniowana jest tak jak powyżej. Jeśli $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ jest symetryczne, to interp$\{\mathbf{K}_{ij}\}$ = interp$\{\mathbf{K}_{ji}\}$ i liczba r-stopni interpolacji jest równa $n(n+1)/2$.

Należy wyróżnić kilka istotnych informacji odnośnie metody interpolacji:

1. Liczba punktów (M) użyta do tworzenia siatki, powinna być znacznie większa aby układ w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego był dokładnie przybliżony,

2. Interpolacja $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ wykazuje oczekiwane właściwości jeśli liczba stanów r w Ξ jest mniejsza od n. Stopień interpolacji jest niższy dla każdego elementu $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ a elementy nie zawarte w Ξ nie mają ograniczeń wynikających z siatki,

3. Interpolacja $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ wykazuje oczekiwane właściwości jeśli liczba stanów r w Ξ jest równa n, ponieważ obie siatki nałożą ograniczenia na wszystkie stany a interpolacja będzie miała taką samą złożoność,

4. Jeśli $nm \leq n(n+1)/2$ gdzie m jest wymiarem sterowania, wtedy interpolacja może być użyta do wyznaczenia macierzy wzmocnień $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ w celu zmniejszenia liczby potrzebnych interpolacji,

5. Interpolacja ta może być użyta nie tylko w przypadku zależnej od stanu macierzy $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, ale także w bardziej złożonych przypadkach sterowania SDRE, które mają zależne od stanu macierze wag $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ oraz $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ we wskaźniku jakości.

8.3 Algorytm Newtona

Algorytm wykorzystuje wartość funkcji, a także jej pierwszą pochodną w celu uzyskania rozwiązania równania Riccatiego. Są dwie możliwe sytuacje zatrzymujące działanie, pierwsza kiedy algorytm zbiegnie do rozwiązania z założoną tolerancją lub kiedy osiągnie maksymalną liczbę iteracji.

Niestety zbieżność nie jest gwarantowana, możliwe jest że wynik będzie znacząco różnił się od poprawnego rozwiązania ze względu na istnienie minimów lokalnych. To także powoduje, że znalezione rozwiązanie może nie zbiegać do stabilnego rozwiązania równania Riccatiego [96]. Kiedy algorytm osiąga obszar zbieżności rozwiązania, zbieżność ma charakter kwadratowy [97].

Przed implementacją algorytmu, należy poczynić następujące założenia:
- system jest stabilizowalny,
- macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ są odwracalne
- zdefiniowanie na wejściu algorytmu macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{K}_0$ (dobrze aby $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_0^T$), tolerancji i limitu iteracji
- oczekiwane rozwiązanie równania Riccatiego $\mathbf{K}$ jest stabilne
- zatrzymanie algorytmu następuje gdy $|\Delta|_1 \leq$ *tolerancja* lub *liczba iteracji* $\geq$ *limit iteracji* ($\Delta = \mathbf{K}_n - \mathbf{K}_{n-1}$).

Pseudo-kod możliwy do implementacji w środowisku numerycznym (np. Matlab) wygląda następująco

$$
\begin{aligned}
& for \quad j = 0, 1, 2, ... \\
& \quad \mathbf{P}_j = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}^T \mathbf{K}_j \mathbf{E} + \mathbf{S}^T \mathbf{C}) \\
& \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{P}_j)^T \mathbf{N}_j \mathbf{E} + \mathbf{E}^T \mathbf{N}_j (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{P}_j) = -\mathbf{R}(\mathbf{K}_j) \\
& \quad \mathbf{K}_{j+1} = \mathbf{K}_j + \mathbf{N}_j \\
& end
\end{aligned}
\tag{8.14}
$$

8.4 Algorytm Newtona z kierunkowym poszukiwaniem minimum funkcji

Metoda ta jest ulepszeniem klasycznej metody Newtona. Poprawiona została szybkość zbieżności algorytmu, a także poprawiono problem dobrania kroku na wejściu stosując kierunkowe poszukiwanie minimum funkcji umożliwiając dobór odpowiedniego rozmiaru kroku [98].

Przed implementacją algorytmu, należy poczynić następujące założenia:
- system jest stabilizowalny,
- macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ są odwracalne
- zdefiniowanie na wejściu algorytmu macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{K}_0$ (dobrze aby $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_0^T$), tolerancji i limitu iteracji
- oczekiwane rozwiązanie równania Riccatiego $\mathbf{K}$
- zatrzymanie algorytmu następuje gdy $|\Delta|_1 \leq tolerancja$ lub *liczba iteracji* $\geq$ *limit iteracji* ($\Delta = \mathbf{K}_n - \mathbf{K}_{n-1}$)

Pseudo-kod możliwy do implementacji w środowisku numerycznym (np. Matlab) można przedstawić następująco

$$\begin{aligned}
&for \quad j = 0, 1, 2, ... \\
&\quad \mathbf{P}_j = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{K}_j\mathbf{E} + \mathbf{S}^T\mathbf{C}) \\
&\quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{P}_j)^T\mathbf{N}_j\mathbf{E} + \mathbf{E}^T\mathbf{N}_j(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{P}_j) = -\mathbf{R}(\mathbf{K}_j) \\
&\quad \mathbf{V}_j = \mathbf{E}^T\mathbf{N}_j\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}_j\mathbf{E} \\
&\quad t_j = \min_{0 \leq t \leq 2}(trace(\mathbf{R}(\mathbf{K}_j + t\mathbf{N}_j)^2)) \\
&\quad \mathbf{K}_{j+1} = \mathbf{K}_j + t_j\mathbf{N}_j \\
&end
\end{aligned} \tag{8.15}$$

8.5 Algorytm Kleinmana

Alegorytm ten jest kolejnym ulepszeniem metody Newtona. Wprowadzona zostaje macierz kosztu i tak definiuje się rozwiązanie równania Riccatiego $\mathbf{K}$. Stosując to podejście, dowiedziono, że jeśli $\mathbf{K}_0$ jest z założenia stabilizowalne, to każda kolejna iteracja powoduje zmniejszanie się kosztu aż do zbiegnięcia do stabilizowalnego rozwiązania. Metoda ta wymaga $6n^3$ operacji na iterację [95].

Przed implementacją algorytmu, należy poczynić następujące założenia:
- system jest stabilizowalny,
- macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ są odwracalne
- zdefiniowanie na wejściu algorytmu macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{K}_0$ (dobrze aby

$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_0^T$), tolerancji i limitu iteracji
- oczekiwane rozwiązanie równania Riccatiego $\mathbf{K}$
- zatrzymanie algorytmu następuje gdy $|\Delta|_1 \leq$ *tolerancja* lub *liczba iteracji* $\geq$ *limit iteracji* ($\Delta = \mathbf{K}_n - \mathbf{K}_{n-1}$)

Pseudo-kod możliwy do implementacji w środowisku numerycznym (np. Matlab) jest następujący:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\
&\mathbf{W} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i \mathbf{S} (\mathbf{A}^T)^i \quad (n - liczba \quad stanow) \\
&\mathbf{K}_0 = (\mathbf{A}^T)^n \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^n \quad (dobierz \quad \mathbf{K}_0 \quad w \quad taki \quad sposob \quad lub \\
&dobierz \quad dowolne) \\
&do \\
&\quad \mathbf{A}_k = (\mathbf{I} + \mathbf{S}\mathbf{K}_k)^{-1}\mathbf{A} \\
&\quad \mathbf{L}_k^T \mathbf{R} \mathbf{L}_k = \mathbf{A}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{S} \mathbf{K}_k \mathbf{A}_k \\
&\quad \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{A}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{L}_k^T \mathbf{R} \mathbf{L}_k + \mathbf{Q} \\
&while(do \quad napotkania \quad warunku \quad zatrzymania)
\end{aligned}
\tag{8.16}
$$

Algorytm ten jest bardziej udoskonaloną metodą, jednak wymaga poczynienia dobrych założeń w celu zapewnienia zbieżności.

8.6 Dekompozycja Schura

Metoda ta jest standardowym podejściem w celu rozwiązania równania Riccatiego. Składa się ona z 2 głównych kroków [99].

1. Redukcja macierzy Hamiltona z $2n \times 2n$ (n - ilość stanów) do postaci Schura

$$
\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \tag{8.17}
$$

Następnie dokonywana jest transformacja

$$
\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ 0 & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix}, \tag{8.18}
$$

gdzie:

$\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

$\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

2. Ostatnim krokiem jest rozwiązanie liniowego równania macierzowego $n - tego$ stopnia w celu uzyskania $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K}\mathbf{U}_{11} = \mathbf{U}_{21}, \tag{8.19}$$

przy czym

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{pmatrix}. \tag{8.20}$$

$\mathbf{U}_{11}$ jest odwracalne, a $\mathbf{U}_{21}\mathbf{U}_{11}^{-1}$ jest rozwiązaniem równania Riccatiego. W przypadku tego algorytmu złożoność obliczeniowa jest na poziomie $75n^3$ liczby operacji potrzebnych do znalezienia stabilizowalnego rozwiązania, przy czym n to liczba stanów systemu.

Rozdział 9

Zastosowania metody SDRE w sterowaniu wybranych układów

W rozdziale przedstawiono zastosowanie metody SDRE do sterowania nieliniowych układów rzeczywistych. W dalszej części opisano 6 głównych grup obiektów wykorzystanych podczas badań. Scharakteryzowano również ich typowe zastosowania. Następnie zaprezentowano symulacje komputerowe działania układów z wyżej wymienionymi obiektami, po zaadoptowaniu do nich odpowiednio klasycznej i zmodyfikowanej metody SDRE.

W pierwszej kolejności pokazano zastosowanie metody SDRE do sterowania silnikami krokowymi. Układy sterowania tego typu pojawiają się w aplikacjach wymagających precyzji [55], np. automatycznych zaworach, urządzeniach pomiarowych (zegary kwarcowe), przy sterowaniu ramionami robotów, w kołach w wózków widłowych, w napędach CD/DVD w drukarkach pozwalając na ruch głowicy czy przesuwanie papieru, a także w motoryzacji odpowiadając za pracę silnika napędowego na biegu jałowym.

Kolejną grupą urządzeń, do których można wykorzystać wcześniej opisywaną metodę są quadrotory oraz hexacoptery (drony). Szczególną popularność zdobywają one w segmencie wojskowym do obserwacji działań militarnych, a także w działaniach cywilnych, gdzie służą, np. do obserwowania trudno dostępnych obszarów, a także umożliwiają filmowanie i fotografowanie zapewniając nową jakość odbioru. Nisko budżetowe rozwiązania służą dzieciom w formie zabawki, a te lepiej wyposażone i wykonane będą zastępować kurierów [78].

Następnym przykładem obiektu jest model matematyczny oscylatora Van der Pola. Równanie Van der Pola ma długą historię stosowania zarówno w naukach fizycznych, jak i biologicznych. Na przykład w biologii Fitzhugh i Nagumo rozszerzyli równanie w polu planarnym i użyli je do modelowania potencjałów czynnościowych neuronów. Równanie wykorzystano również w sejsmologii do modelowania dwóch płyt w uskoku geologicznym oraz w badaniach fonacji w celu modelowania prawego i lewego oscylatora fałdu głosowego [100].

Siłowniki liniowe znajdują zastosowanie zarówno w dziedzinie rehabilitacji, w opiece domowej, technice przemysłowej gdzie ważne są:
lekka i kompaktowa konstrukcja, duża sztywność, obsługa manualna nie sprawiająca kłopotu użytkującemu, prosty montaż, cicha praca. Wykorzystuje się je jako napędy do bram czy klap. Są to urządzenia łatwe w obsłudze a zarazem niezawodne, dlatego często znajdują zastosowanie w sprzęcie rolniczym, a także w urządzeniach specjalistycznych zarówno w inteligentnych domach czy biurach, a nawet w branży związanej z energią odnawialną.
Urządzenia te są samohamowne, ale nawet po odłączeniu zasilania są
w stanie utrzymać spore ciężary. Możliwe jest łączenie ich z czujnikami indukcyjnymi pozwalając na zaadoptowanie urządzenia w różnych aplikacjach i pozycjonować zatrzymanie w konkretnym punkcie [44].

Kolejna grupa to roboty mobilne. Dzielą się one na jeżdżące, kroczące, latające i pływające. Urządzenia te mogą być autonomiczne, których nie ograniczają przewody zasilające, a sterowanie może odbywać się zdalnie. Roboty mobilne, w których zastosowano napęd różnicowy są ważnymi systemami pełniącymi istotną rolę jako ruchome platformy dla urządzeń, takich jak manipulatory czy systemy wizyjne. Stosowane są przy pomiarach zdalnych, podczas oceny szkód po katastrofach, przy wykrywaniu wycieków niebezpiecznych płynów, ułatwiają monitorowanie nasilenia korków, pomagają w poszukiwaniach w miejscach niebezpiecznych dla zespołów ratowniczych, umożliwiają komunikację i dostarczanie przesyłek. Popularnym sposobem projektowania sterowania dla robotów mobilnych jest wykorzystanie zależności kinematycznych, co w połączeniu z dobrze znanymi algorytmami pozwala na zaprojektowanie prostej i efektywnej metody regulacji [101].

Ostatnia grupa to manipulatory, które wykonują zadania bez bezpośredniego kontaktu. Na początku służyć miały przy pracach niebezpiecznych (np. w otoczeniu radioaktywnym, skażonym lub niedostępnym).
W tej chwili znajdują szerokie zastosowanie w medycynie będąc łącznikiem między chirurgiem a pacjentem, a także w motoryzacji ułatwiając procesy wytwarzania nowych pojazdów. Umożliwia pracę w zbyt gorących środowiskach i przenoszenie dużych ciężarów, zmniejszając ryzyko pracy dla czło-

wieka. Sam manipulator przypomina ramię, w którego skład wchodzą przeguby i złącza, które przez swoją liczbę i sposób połączenia, definiują ilość stopni swobody robota [102].

9.1 Wyniki obliczeniowe i symulacja

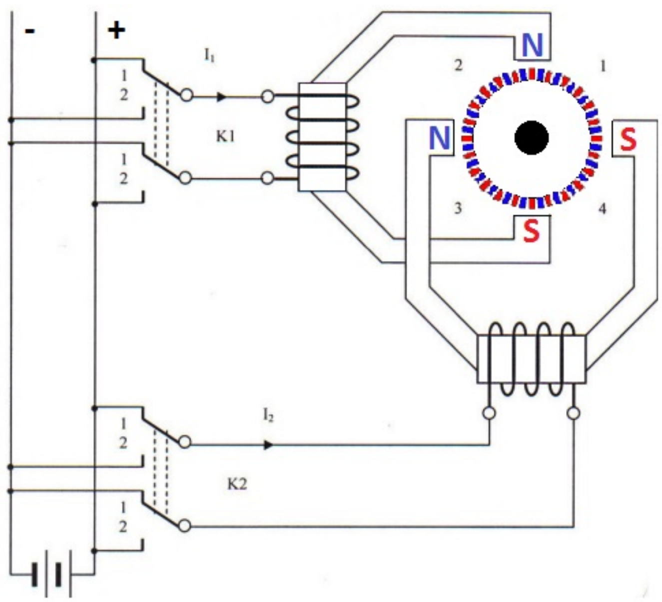
W kontekście powyższego opisu, w kolejnych podrozdziałach przedstawiono symulacje układów sterowania suboptymalnego pokazując ich przydatność i poprawność działania wykorzystując następujące modele rzeczywiste opisane wcześniej:

- silnik krokowy,
- quadrotor,
- oscylator Van der Pola,
- siłownik liniowy (aktuator),
- robot mobilny,
- manipulator o 6 stopniach swobody zredukowanych do 3.

W każdym przypadku porównane zostanie klasyczne podejście wykorzystujące SDRE z metodą proponowaną przez autorkę. Wszystkie powyższe przykłady przedstawiają sterowanie do zadanego punktu i obrazują działanie metody zarówno ze skończonym, jak i nieskończonym horyzontem czasowym.
Wszystkie symulacje wykonywane były na tym samym sprzęcie (Windows 7 Professional, 64-bit Intel® Core^{TM} i5-5200M CPU @ 2.40GHz) z oprogramowaniem MATLAB R2017b. Do obliczania rozwiązania równania Riccatiego, wykorzystano zaimplementowaną w środowisku funkcję CARE bazującą na dekompozycji Schura [103].

9.1.1 Sterowanie silnikiem krokowym

Obiektem wybranym do sterowania jest silnik krokowy, należący do grupy silników synchronicznych, których ruch wirnika powodowany jest impulsowym zasilaniem. Wirnik po otrzymaniu impulsu obraca się o stały, określony kąt, wynikający z budowy silnika. Poniżej został przedstawiony schemat silnika krokowego wykorzystanego do dalszych symulacji. W zależności od tego, przez które uzwojenia i w którym kierunku płynie prąd, wirnik z magnesami ustawia się w odpowiednią stronę.



Rysunek 9.1: Schemat silnika krokowego z zasilaniem dwufazowym

Poniższa tabela przedstawia zasadę działania silnika krokowego zasilanego 2 fazami w zależności od położenia kluczy K_1 i K_2.

Pozycja wirnika	Klucz K_1	Klucz K_2	Kierunek obrotu silnika	
1	1	1		$\Uparrow$
2	2	1	w	w
3	2	2	prawo	lewo
4	1	2	$\Downarrow$	

Tablica 9.1: Komutacja silnika krokowego

Model silnika, wykorzystanego do symulacji zaczerpnięto z [104, 105]. Równania obwodu elektrycznego mają postać

$$e_a = -K_m \omega \sin(N\theta), \tag{9.1}$$

$$e_b = -K_m \omega \cos(N\theta), \tag{9.2}$$

$$L\frac{di_a}{dt} = v_a - Ri_a - e_a, \tag{9.3}$$

$$L\frac{di_b}{dt} = v_b - Ri_b - e_b. \tag{9.4}$$

Poniższe równanie przedstawia równanie układu mechanicznego

$$J\frac{d\omega}{dt} + b\omega = T_e. \tag{9.5}$$

Ostatnie z równań opisujące wybrany silnik krokowy, przedstawia matematyczny opis momentu obrotowego

$$T_e = -K_m \left[i_a - \frac{e_a}{R_m}\right] \sin(N\theta) + K_m \left[i_b - \frac{e_b}{R_m}\right] \cos(N\theta), \tag{9.6}$$

gdzie:

e_a, e_b - siły przeciwelektromotoryczne,
i_a, i_b - prądy uzwojenia,
T_e - moment elektromagnetycznzy,
v_a, v_b - napięcia uzwojenia fazowego,
K_m - stała mechaniczna, zależna m.in. od strumienia magnetycznego stojana oraz liczby zwojów w uzwojeniach wirnika,
N - liczba zębów na każdym z dwóch biegunów wirnika,
R - rezystancja uzwojenia,
L - indukcyjność uzwojenia,
J - moment bezwładności,
b - współczynnik tarcia lepkiego,
R_m - reluktancja,
ω - prędkość wirnika,
θ - kąt obrotu wirnika.

Równania (9.1-9.6) można przedstawić w postaci równań stanu, wykorzystując parametryzację SDC

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & \frac{K_m \sin(Nx_4)}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} & \frac{K_m \cos(Nx_4)}{L} & 0 \\ -\frac{K_m \sin(Nx_4)}{J} & -\frac{K_m \cos(Nx_4)}{J} & -\frac{(b+K_m{}^2)}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \tag{9.7}$$

gdzie:
$x_1 = i_a$, $x_2 = i_b$ - prądy uzwojenia,
$x_3 = \omega$ - prędkość wirnika,
$x_4 = \theta$ - kąt obrotu wirnika,
u_1, u_2 - napięcia zasilania.

Stosując podejście proponowane przez autorkę, polegające na dekompozycji macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ na sumę dwóch, zależnej i niezależnej od stanu $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}))$, model przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(b+K_m{}^2)}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{K_m \sin(Nx_4)}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_m \cos(Nx_4)}{L} & 0 \\ -\frac{K_m \sin(Nx_4)}{J} & -\frac{K_m \cos(Nx_4)}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \tag{9.8}$$

Jak pokazano w równaniu (9.8), jedynie macierz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ jest zależna od stanu, macierz $\mathbf{B}$ jest macierzą stałą.

Macierze wag określone w trakcie symulacji wynosiły odpowiednio

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}. \tag{9.9}$$

Wartości poszczególnych stałych związanych z modelem matematycznym silnika oraz informacje dotyczące symulacji dla nieskończonego horyzontu czasowego podano poniżej

Zmienna	Wartość	Jednostka
K_m	0.5	$\frac{\text{N m}}{\text{A}}$
N	50	
R	0.55	Ω
L	$1.5 \cdot 10^{-3}$	H
J	$4.5 \cdot 10^{-5}$	$\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$
b	$8 \cdot 10^{-4}$	$\frac{\text{N m s}}{\text{rad}}$
R_m	1	H^{-1}

Tablica 9.2: Parametry silnika krokowego

Stan początkowy silnika wybrany podczas symulacji

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3.64 \\ 3.64 \\ 0 \\ 1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{A} \\ \text{A} \\ \text{rad/s} \\ \text{deg} \end{bmatrix}. \tag{9.10}$$

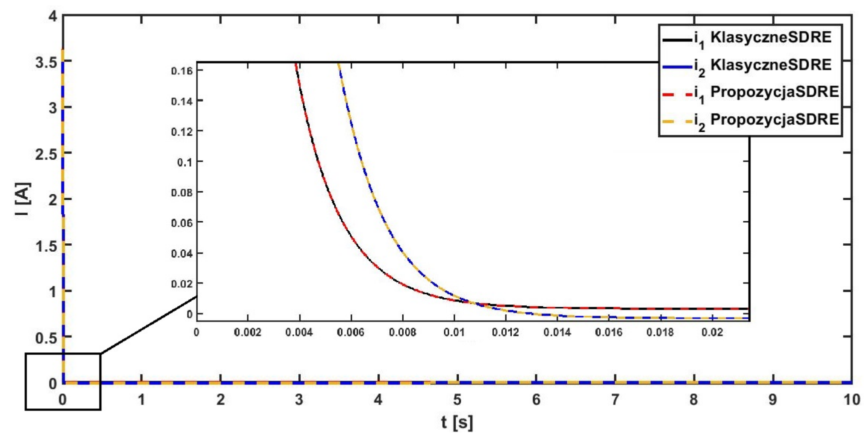
Podstawowe parametry czasowe przyjęte w symulacji obejmują:
czas symulacji $10s$ oraz krok czasowy $1 \cdot 10^{-5}s$.

Implementując przyjęty model oraz podane powyżej parametry symulacji, wykonano analizę numeryczną działania systemu sterowania dla klasycznego podejścia wykorzystującego SDRE oraz propozycji nowego podejścia przedstawionego w pracy. Przedstawiono porównanie czasów wykonania symulacji dla obu metod oraz przebiegi czasowe poszczególnych zmiennych.

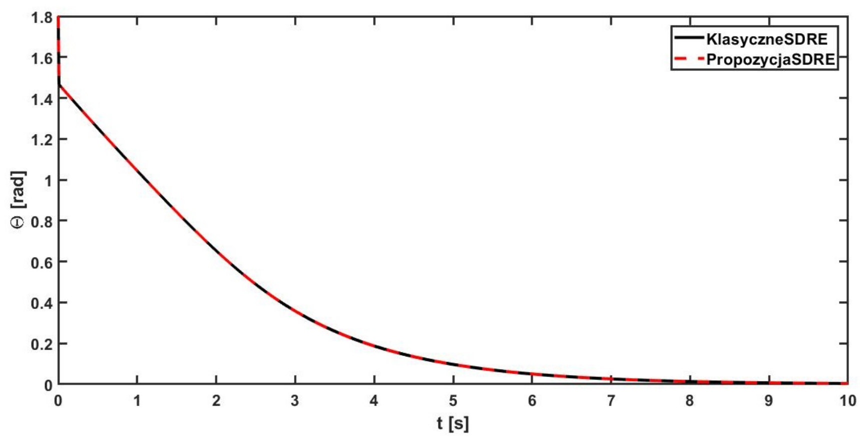
Porównanie czasów wykonania symulacji dla obu metod	
klasyczna metoda SDRE	69.592506s
proponowana metoda SDRE	**8.381148s**

Tablica 9.3: Czasy wykonania symulacji

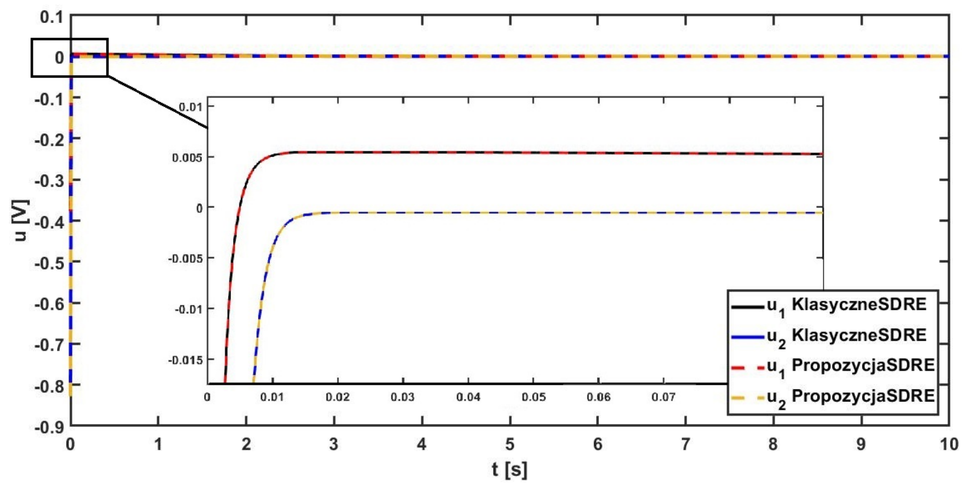
Na podstawie zestawienia w 9.3 można zauważyć, że czas symulacji dla nowej metody jest znacząco krótszy niż dla podejścia klasycznego. Potwierdza to, że dzięki modyfikacjom wprowadzonym przez autorkę, znacząco zmniejsza się nakład obliczeniowy, a co za tym idzie czas potrzebny na wykonanie symulacji zadania.



Rysunek 9.2: Porównanie przebiegów prądów uzwojenia



Rysunek 9.3: Porównanie przebiegów kątów obrotu wału silnika

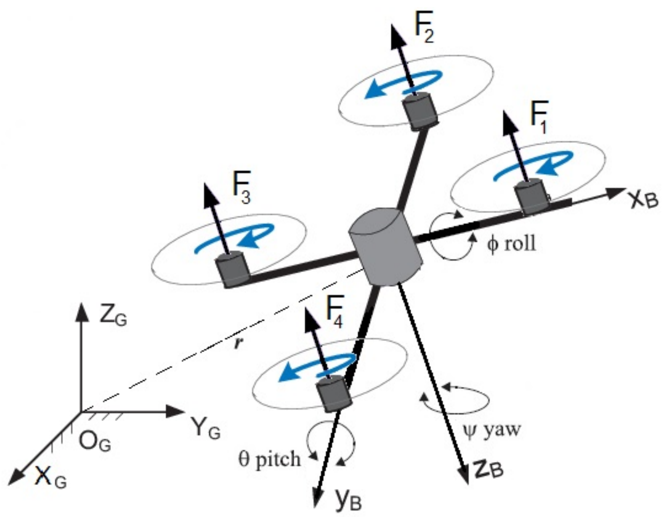


Rysunek 9.4: Porównanie przebiegów sterowań

Rys. 9.5 przedstawia porównanie prądów uzwojenia w silniku krokowym dla sterowania z wykorzystaniem klasycznego SDRE ze sterowaniem proponowanym przez autorkę. Przebiegi są niemal identyczne. Ta sama sytuacja dotyczy przebiegów sterowań (Rys. 9.4), a także kątów obrotu wału silnika (Rys. 9.3). Przebiegi pokazują, że dla zakładanego warunku początkowego stan zbiega asymptotycznie do zera. Można to zaobserwować dla klasycznego i proponowanego nowego podejścia SDRE. Nowa metoda sterowania prawidłowo stabilizuje system. Uzyskane wyniki są takie same jak w klasycznym SDRE i praktycznie się pokrywają. Jest to dowód na to,
że proponowana metoda jest dokładna i najmniej kosztochłonna obliczeniowo, ponieważ rozwiązuje się równanie ARE tylko raz oraz dokonując pseudoinwersji. Co więcej, czas wykonania symulacji w przypadku zmodyfikowanej metody wykorzystującej SDRE jest ponad ośmiokrotnie krótszy.

9.1.2 Sterowanie quadrotorem

Model matematyczny quadrotora został zaczerpnięty z [78]. Urządzenie to wyposażone jest w cztery niezależne napędy elektryczne z układem sterującym znajdującym się w środku masy. Quadrotor posiada 6 stopni swobody, gdzie pierwsze 3 związane są z położeniem, a kolejne 3 z kątami Eulera określającymi orientację. Zakłada się sztywną ramę, symetryczną strukturę modelu, każdy napęd jest sterowany niezależnie, a efekty aerodynamiczne są pomijane.



Rysunek 9.5: Schemat quadrotora

W celu określenia modelu dynamicznego zdefiniowano kąty Eulera: roll $\phi \in \langle -\pi, \pi \rangle$, pitch $\theta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, yaw $\psi \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Kąty te są sekwencją 3 rotacji

$$\mathbf{R_x}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}, \tag{9.11}$$

$$\mathbf{R_y}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \tag{9.12}$$

$$\mathbf{R_z}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.13}$$

Wówczas orientacja układu lokalnego quadrotora względem układu podstawowego wyraża się następująco (aby uprościć zapis funkcje trygonometryczne skrócono tylko do pierwszej litery):

$$\mathbf{R_{zyx}}(\psi,\theta,\phi) = \mathbf{R_z}(\psi)\mathbf{R_y}(\theta)\mathbf{R_x}(\phi) =$$
$$\begin{bmatrix} c(\psi)c(\theta) & c(\psi)s(\theta)s(\phi) - s(\psi)c(\phi) & c(\psi)s(\theta)c(\phi) + s(\psi)s(\phi) \\ s(\psi)c(\theta) & s(\psi)s(\theta)s(\phi) + c(\psi)c(\phi) & s(\psi)s(\theta)c(\phi) - c(\psi)s(\phi) \\ -s(\theta) & c(\theta)s(\phi) & c(\theta)c(\phi) \end{bmatrix}. \tag{9.14}$$

Konfigurację układu mechanicznego opisuje wektor pozycji $\mathbf{r}^T = (x, y, z)$ oraz orientacji $\Omega^T = (\psi, \phi, \theta)$. Przyspieszenia liniowe quadrotora spełniają następującą zależność

$$\ddot{\mathbf{r}} = -g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{R}\frac{b}{m}\sum_{i=1}^{4}\omega_i^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{9.15}$$

gdzie:

g - przyspieszenie grawitacyjne

$\mathbf{R}$ - macierz rotacji

b - współczynnik ciągu

ω_i - prędkość i-tego silnika odpowiednio $i = 1, 2, 3, 4$.

Znając macierz bezwładności $\mathbf{I}$ (która jest macierzą diagonalną z głównymi momentami bezwładności I_x, I_y, I_z na diagonali), bezwładność silnika J_R oraz wektor τ opisujący moment siły, uzyskuje się drugie równanie różniczkowe opisujące dynamikę w ruchu obrotowym

$$\mathbf{I}\ddot{\Omega} = -\dot{\Omega} \times \mathbf{I}\dot{\Omega} - \sum_{i=1}^{4} J_R \left[\dot{\Omega} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right] \omega_i + \tau. \tag{9.16}$$

Wektor τ zależy od prędkości kątowych wirników i określony jest następująco

$$\tau = \begin{bmatrix} lb(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ lb(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ d(\omega_2^2 + \omega_4^2 - \omega_1^2 - \omega_3^2) \end{bmatrix}, \tag{9.17}$$

gdzie:
l - długość ramienia quadrotora
d - współczynnik oporu.

Model tego quadrotora posiada 4 wejścia sterujące (unoszenie się w globalnym układzie współrzędnych oraz 3 kąty Eulera). Zakłada się, że są one wprost proporcjonalne do kwadratów prędkości kątowych silnika.

$$\begin{cases} u_1 = b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \\ u_2 = b(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ u_3 = b(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ u_4 = d(\omega_2^2 + \omega_4^2 - \omega_1^2 - \omega_3^2). \end{cases} \tag{9.18}$$

Dodatkowo dla uproszczenia zapisu wprowadza się nową zmienną opisującą względną prędkość silnika

$$\omega_d = \omega_2 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_3. \tag{9.19}$$

Korzystając z (9.15-9.19) można przedstawić model dynamiczny systemu

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi))\dfrac{u_1}{m} \\ \ddot{y} = (\cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi))\dfrac{u_1}{m} \\ \ddot{z} = -g + (\cos(\phi)\cos(\theta))\dfrac{u_1}{m} \\ \ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}\dfrac{(I_y - I_z)}{I_x} - \dfrac{J_R}{I_x}\dot{\theta}\omega_d + \dfrac{l}{I_x}u_2 \\ \ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}\dfrac{(I_z - I_x)}{I_y} + \dfrac{J_R}{I_y}\dot{\phi}\omega_d + \dfrac{l}{I_y}u_3 \\ \ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta}\dfrac{(I_x - I_y)}{I_z} + \dfrac{l}{I_z}u_4 \end{cases} . \tag{9.20}$$

Model ten może być zapisany w przestrzeni stanu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, gdzie

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \tag{9.21}$$

jest wektorem sterowań danych we wzorze (9.18), zaś $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{12}$ jest wektorem zmiennych stanu postaci

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}. \tag{9.22}$$

Ze wzorów (9.20) oraz (9.22) uzyskuje się

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ (\cos x_7 \sin x_9 \cos x_{11} + \sin x_7 \sin x_{11})\frac{u_1}{m} \\ x_4 \\ (\cos x_7 \sin x_9 \sin x_{11} - \sin x_7 \cos x_{11})\frac{u_1}{m} \\ x_6 \\ -g + (\cos x_7 \cos x_9)\frac{u_1}{m} \\ x_8 \\ x_{12}x_{10}I_1 - \frac{J_R}{I_x}x_{10}\omega_d + \frac{l}{I_x}u_2 \\ x_{10} \\ x_{12}x_8I_2 + \frac{J_R}{I_y}x_8\omega_d + \frac{l}{I_y}u_3 \\ x_{12} \\ x_{10}x_8I_3 + \frac{l}{I_z}u_4 \end{pmatrix} \tag{9.23}$$

przy czym $I_1 = \frac{(I_y - I_z)}{I_x}$, $I_2 = \frac{(I_z - I_x)}{I_y}$, $I_3 = \frac{(I_x - I_y)}{I_z}$.

Model quadrotora w przestrzeni stanu może być podzielony na dwa zestawy równań różniczkowych, z których jeden odnosi się do dynamiki położenia, drugi obrotu. Zmienna ω_d jest postrzegane jako zakłócenie i w symulacjach będzie pomijana.

Stosując do podanego modelu metodę SDRE w jej klasycznej postaci, w przypadku problemu sterowania orientacją, wektor stanu jest postaci

$$\mathbf{x_I} = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} \tag{9.24}$$

natomiast wektor sterowań

$$\mathbf{u_I} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \tag{9.25}$$

Model w przestrzeni stanu, po parametryzacji SDC można określić następująco

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{12}I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_{12}I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_8I_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x_I} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{l}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{I_z} \end{bmatrix} \mathbf{u_I}. \tag{9.26}$$

Można zauważyć, że macierz **B** jest macierzą stałą, tylko macierz $\mathbf{A}(\mathbf{x_I})$ jest zależną od stanu.

Stosując podejście proponowane przez autorkę, dokonuje się dekompozycji macierzy **A** na sumę dwóch- zależnej i niezależnej od stanu otrzymując tym samym model właściwy dla zmodyfikowanej metody wykorzystującej SDRE postaci

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{I}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{12}I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{12}I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_8 I_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{I}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{l}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{I_z} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{I}}. \tag{9.27}$$

Macierze wag we wskaźniku jakości sterowania zarówno w klasycznym, jak i zmodyfikowanym przypadku metody sterowania przyjęto jak poniżej

$$\mathbf{Q} = 1 \cdot \left[\mathbf{I}_{6\times 6}\right], \qquad \mathbf{R} = 100 \cdot \left[\mathbf{I}_{3\times 3}\right]. \tag{9.28}$$

Wartości poszczególnych parametrów wykorzystanych podczas modelowania obiektu dla przypadku sterowania z nieskończonym horyzontem czasowym

Zmienna	Wartość	Jednostka
g	9.81	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
m	0.5	kg
l	0.3	m
I_x	0.0081	N
I_y	0.0081	N
I_z	0.0162	N
J_R	0.01	N

Tablica 9.4: Dane do symulacji quadrotora w środowisku MATLAB

Stan początkowy dla quadrotora przyjęty w symulacji

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \pi/4 \\ \pi/2 \\ 3\pi/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{rad} \\ \text{rad} \\ \text{rad} \\ \text{rad/s} \\ \text{rad/s} \\ \text{rad/s} \end{bmatrix}. \tag{9.29}$$

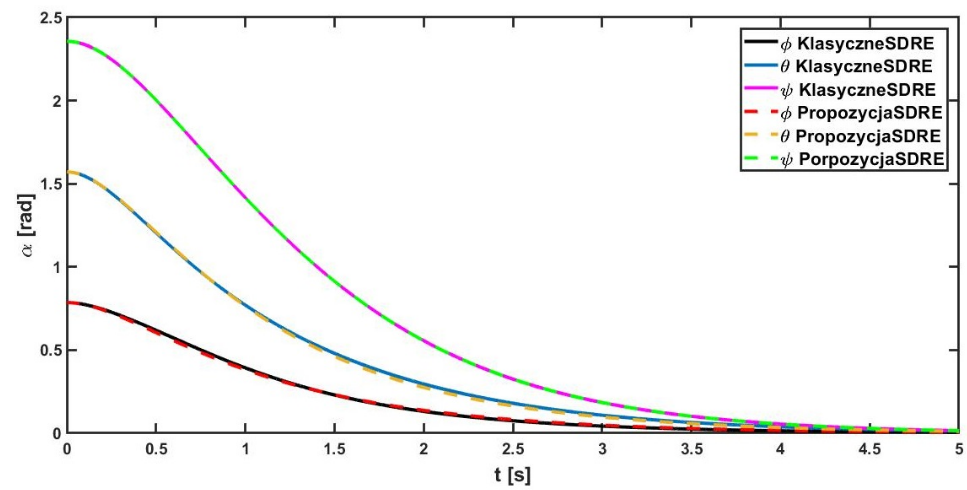
Podstawowe parametry czasowe przyjęte w symulacji obejmują:
czas symulacji $5s$ oraz krok czasowy $1 \cdot 10^{-3}s$.

Celem sterowania była stabilizacja orientacji w zerze, czas wykonania symulacji przedstawia poniższa tabela.

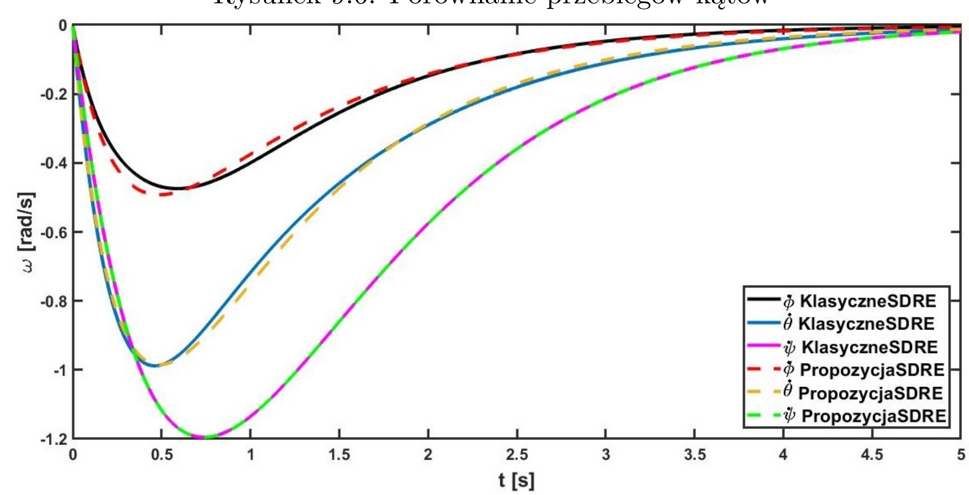
Porównanie czasów wykonania symulacji dla obu metod	
klasyczna metoda SDRE	11.276407s
proponowana metoda SDRE	**2.893052s**

Tablica 9.5: Czasy wykonania symulacji

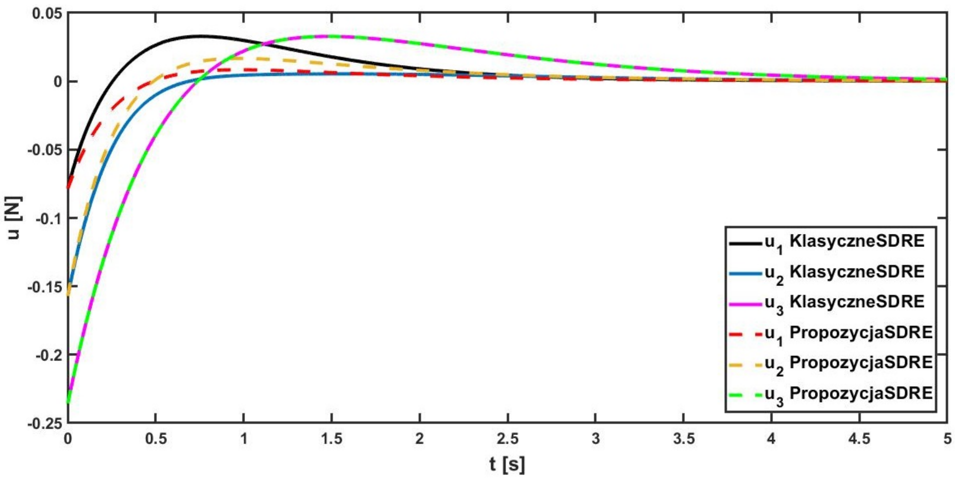
Zestawienie w Tab. 9.5 pozwala zaobserwować, że czas wykonania symulacji sterowania dla nowej metody jest znacząco krótszy niż w przypadku klasycznego podejścia. Potwierdza to, że dzięki modyfikacjom wprowadzonym przez autorkę, znacząco zmniejsza się nakład obliczeniowy, a także czas potrzebny na wykonanie zadania sterowania.



Rysunek 9.6: Porównanie przebiegów kątów



Rysunek 9.7: Porównanie przebiegów prędkości



Rysunek 9.8: Porównanie przebiegów sterowań

Wyniki symulacji przedstawiające porównanie obu metod zawierają Rys. 9.6-9.8. W przypadku porównania kątów jak i prędkości, wykresy praktycznie pokrywają się. Analizując przebiegi w sterowaniu widać, że nowo proponowana metoda zapewnia nie tylko zbieżność asymptotyczną, ale także szybsze osiąganie wartości zadanej. Również w tym wypadku czas wykonania obliczeń jest korzystniejszy dla nowej metody i krótszy prawie czterokrotnie.

9.1.3 Sterowanie oscylatorem Van der Pola

W poniższym rozdziale przedstawiono zastosowanie metod SDRE do sterowania obiektem nieliniowym, którym jest tzw. Oscylator Van der Pola. Został pierwotnie zaproponowany przez holenderskiego inżyniera elektryka i fizyka Balthasara van der Pol. Odkrył on stabilne oscylacje, które później nazwał oscylacjami relaksacyjnymi i są obecnie znane jako typ cyklu granicznego w obwodach elektrycznych wykorzystujących lampy próżniowe. Równanie różniczkowe drugiego rzędu, opisujące ten model jest postaci

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \tag{9.30}$$

gdzie:

x - współrzędna położenia, która jest funkcją czasu

μ - skalarny parametr definiujący nieliniowości i siłę tłumienia (w dalszych rozważaniach parametr ten będzie miał wartość 1).

Rozpisując powyższe równanie w przestrzeni stanów i przyjmując jako wektor stanu

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \tag{9.31}$$

otrzymuje się model postaci

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1-{x_1}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \tag{9.32}$$

Po zastosowaniu dekompozycji macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ na sumę dwóch zależnej i niezależnej od stanu, równanie (9.32) można przedstawić następująco

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -{x_1}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \tag{9.33}$$

Badanie algorytmów sterowania przeprowadzono dla warunków początkowych $x_1(0) = 5, x_2(0) = 5$, oraz następujących macierzy wag

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{R} = [1], \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}. \tag{9.34}$$

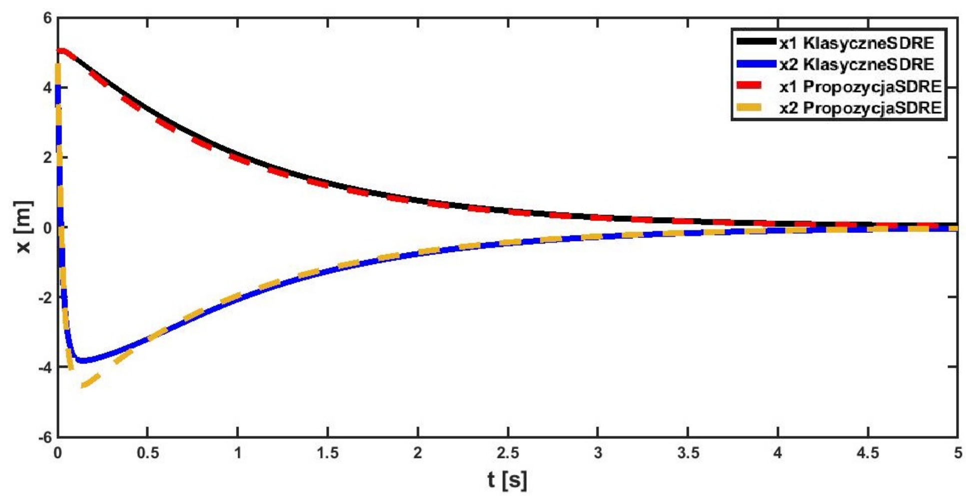
Podstawowe parametry czasowe przyjęte w symulacji obejmują:
czas symulacji $5s$ oraz krok czasowy $1 \cdot 10^{-3} s$.

Wyniki przedstawione poniżej, porównują klasyczną metodę wykorzystującą SDRE ze zmodyfikowaną proponowaną przez autorkę dla skończonego horyzontu czasowego.

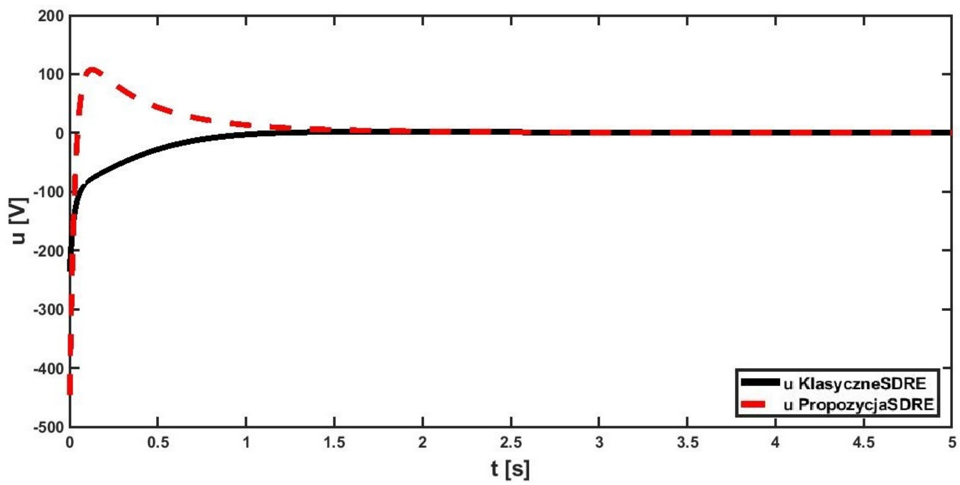
Porównanie czasów wykonania symulacji dla obu metod	
klasyczna metoda SDRE	460.749405s
proponowana metoda SDRE	**438.624335s**

Tablica 9.6: Czasy wykonania symulacji

W przypadku skończonego horyzontu czasowego, różnica między klasyczną metodą a proponowanym podejściem jest mniejsza niż w przypadku nieskończonego horyzontu czasowego. Wynika to z faktu, że macierz $\mathbf{K}_1(t)$ jest zależna od czasu i należy wyznaczać ją w każdym kroku czasowym tak jak w przypadku klasycznego podejścia. Jednak uniezależnienie jej od stanu układu, mimo wszystko pozwala zredukować obliczenia i skrócić czas wykonywania symulacji.



Rysunek 9.9: Porównanie przebiegów stanów



Rysunek 9.10: Porównanie przebiegów sterowań

Wyniki zestawione na Rys. 9.9 pokazują, że trajektorie stanu są analogiczne dla obu metod. Sterowanie zarówno w jednej, jak i drugiej metodzie asymptotycznie zbiega do zera, co przedstawia Rys. 9.10, choć można zauważyć inny charakter stanów przejściowych. Fakt, że przebiegi sterowań różnią się, podczas gdy trajektorie stanu są niemalże identyczne, wynika z małej wrażliwości układu zamkniętego. Czas potrzebny do wykonania zadania sterowania w przypadku nowej metody jest krótszy o około 20 sekund, czyli około 5%, co potwierdza zredukowanie nakładu obliczeniowego.

9.1.4 Sterowanie aktuatorem liniowym

Rozdział ten przedstawia zastosowanie metody sterowania SDRE, zarówno klasycznego jak i zmodyfikowanego podejścia, dla modelu aktuatora liniowego. Urządzenia te są często wykorzystywanymi w automatyce przemysłowej. Przełączany napęd przenosi ruch obrotowy silnika na śrubę pociągową lub napęd ze śrubą trapezową. Przetwarzany jest ruch obrotowy na liniowy. Charakteryzują się prostotą wykonania, a także są łatwe w eksploatacji bez uszczerbku na jakości działania.
W symulacjach zamodelowano rzeczywisty obiekt marki Linak Actuator typu LA36 [106].

Rysunek 9.11: Widok aktuatora liniowego

Model siłownika opisuje system elektromechaniczny, którego równanie uwzględniające siłę tarcia dynamicznego jest postaci

$$M\ddot{x}(t) + F_{fric}(\dot{x}) = F(t) \tag{9.35}$$

gdzie:
M - ruchoma masa,
x - pozycja.
Siła generowana przez urządzenie jest proporcjonalna do prądu

$$F(t) = k_f i(t), \tag{9.36}$$

gdzie $k_f > 0$ jest stałą. Nieliniowe tarcie statyczne wyrażone przy pomocy modelu Stribecka jest następujące

$$F_{fric}(\dot{x}) = (F_c + (F_m - F_c)e^{-\alpha}|\dot{x}(t)|)\text{sign}(\dot{x}(t)) + \beta\dot{x}(t) \tag{9.37}$$

gdzie:
F_m - maksymalne tarcie statyczne,
F_c - tarcie Coulomba,
α - współczynnik tłumienia zależny od serwomechanizmu,
β - współczynnik lepkości.
Dalej $\mathrm{sign}(\dot{x}(t))$ aproksymuje się przez $\tanh(\gamma\dot{x})$, gdzie $\gamma > 0$ jest dostatecznie dużą stałą.

Równanie obwodu elektrycznego silnika prądu stałego, jest opisane przez prąd silnika, z uwzględnieniem rezystancji uzwojenia i indukcyjności, można je wyrazić następująco

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + k_e\dot{x}(t) = u(t) \tag{9.38}$$

gdzie:
L - indukcyjność,
R - rezystancja,
$k_e\dot{x}(t)$ - siła przeciwelektromotoryczna.

Przedstawiając rozważany system elektromechaniczny w przestrzeni stanów, otrzymuje się

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{F_{cm}}{M}\tanh(\gamma x_2) - \frac{\beta}{M}x_2 + \frac{k_f}{M}x_3 \\ -\frac{k_e}{L}x_2 - \frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}u\end{bmatrix}, \tag{9.39}$$

przy czym $F_{cm} = F_c + (F_m - F_c)e^{-\alpha}|\dot{x}(t)|$.
Wektor stanu opisuje pozycję, prędkość oraz prąd, tj.

$$x = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ i\end{bmatrix}. \tag{9.40}$$

Stosując nową metodę SDRE, macierz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ wyrażono przez sumę dwóch składników. Wówczas równanie (9.39) można przedstawić następująco

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{\beta}{M} & \frac{k_f}{M}\\ 0 & -\frac{k_e}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-F_{cm}}{M}tanh(\gamma x_2)/x_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u. \tag{9.41}$$

W badaniach symulacyjnych macierze wag przyjęto jako

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{R}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9.42}$$

Wartości poszczególnych stałych przyjętych podczas symulacji porównawczej dla skończonego horyzontu czasowego

Zmienna	Wartość	Jednostka
F_m	0.01	N
F_c	0.005	N
α	2	
β	1.4	
M	0.25	kg
k_f	0.02	N
k_e	0.75	N
γ	100	
R	9.75	Ω
L	0.0024	H

Tablica 9.7: Parametry aktuatora liniowego

Stan początkowy dla aktuatora założony podczas symulacji wynosi

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m} \\ \mathrm{m/s} \\ \mathrm{A} \end{bmatrix}. \tag{9.43}$$

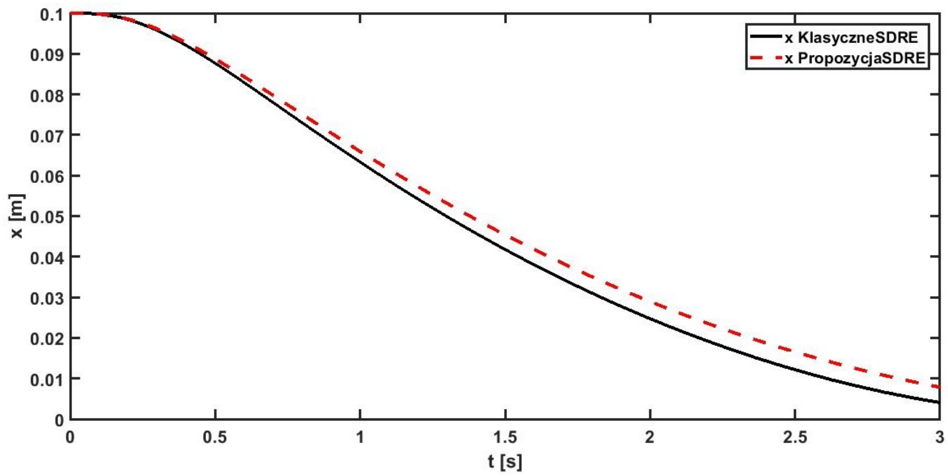
Podstawowe parametry czasowe przyjęte w symulacji obejmują: czas symulacji $3s$ oraz krok czasowy $2 \cdot 10^{-5}s$.

Porównanie czasów wykonania symulacji dla obu metod	
klasyczna metoda SDRE	34.338622s
proponowana metoda SDRE	**33.693131s**

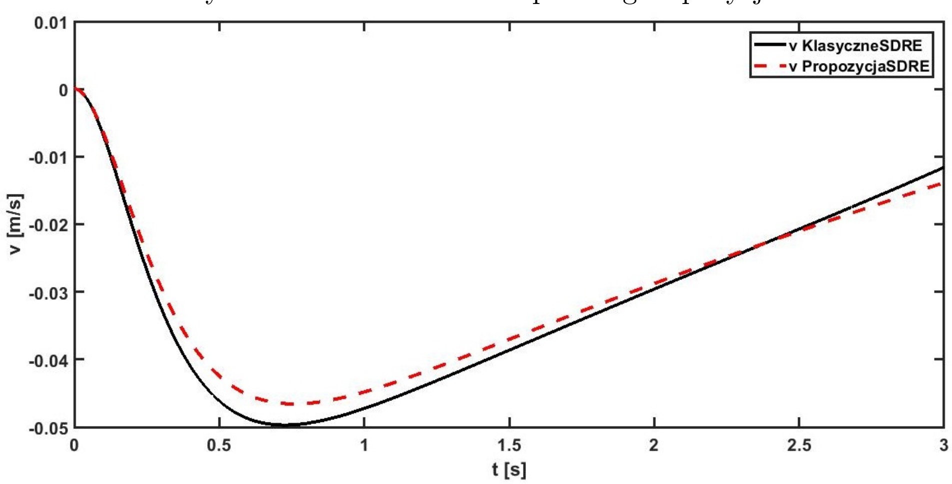
Tablica 9.8: Czasy wykonania symulacji

Tak jak w przypadku oscylatora Van der Pola, przy skończonym horyzoncie czasowym, różnica między klasyczną metodą a proponowanym podejściem jest mniejsza niż w rozważanych przykładach z nieskończonym

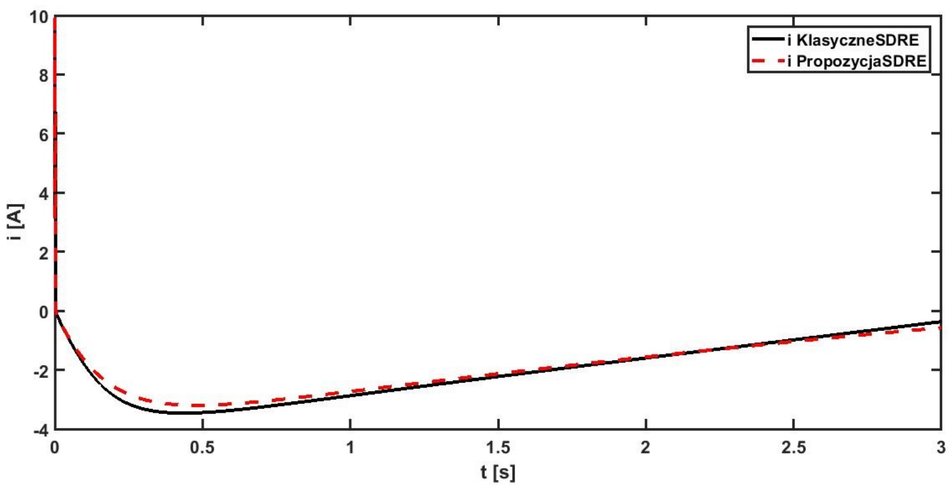
horyzontem czasowym.
Wynika to z faktu, że macierz $\mathbf{K}_1(t)$ jest zależna od czasu i należy wyznaczać ją w każdym kroku czasowym, tak jak w przypadku klasycznego podejścia. Jednak uniezależnienie jej od stanu układu, mimo wszystko pozwala zredukować obliczenia i skrócić czas wykonywania symulacji.



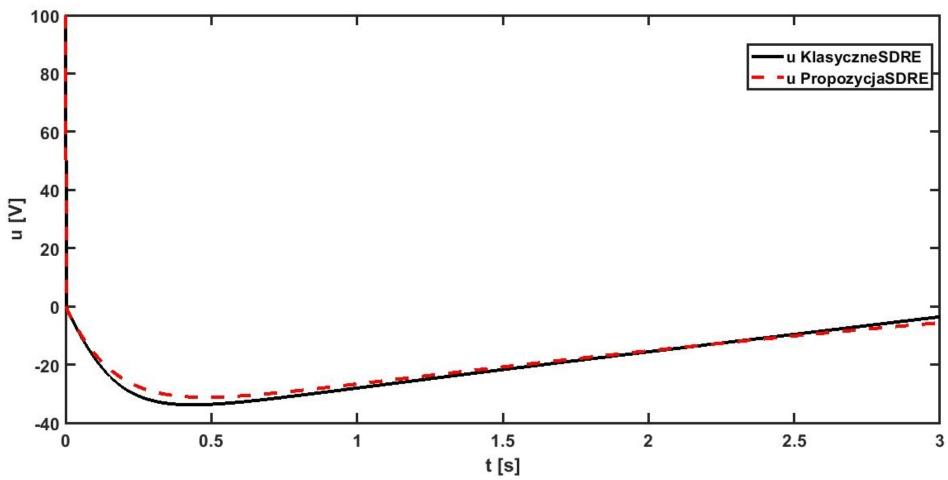
Rysunek 9.12: Porównanie przebiegów pozycji



Rysunek 9.13: Porównanie przebiegów prędkości



Rysunek 9.14: Porównanie przebiegów prądów

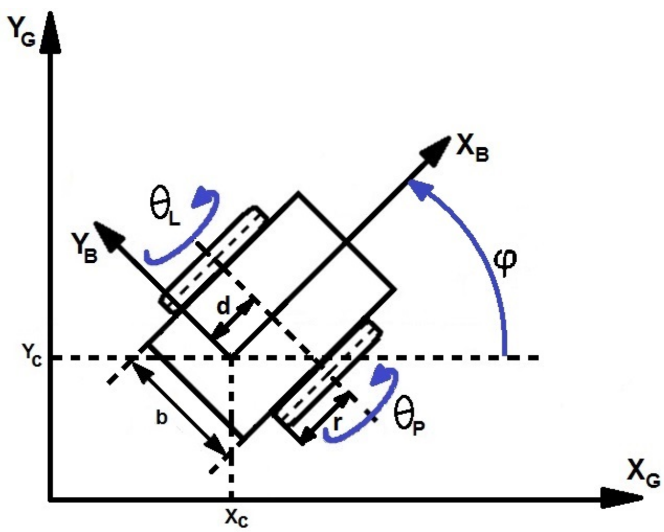


Rysunek 9.15: Porównanie przebiegów sterowań

W każdym z powyższych przypadków przebiegi pokrywają się, zarówno dla pozycji (Rys. 9.12), prędkości (Rys. 9.13), prądów (Rys. 9.14) czy sterowań (Rys. 9.15). Różnice są pomijalne, zaś krótszy czas wykonania symulacji o około 2%, można zatem stwierdzić, że użycie nowego podejścia pozwala skrócić czas symulacji redukując złożoność obliczeniową zadania.

9.1.5 Sterowanie robotem mobilnym

W tym rozdziale jako obiekt sterowania rozważono dwukołowy robot mobilny. Przyjęto, że obiekt te posiada napęd różnicowy i porusza się w przestrzeni kartezjańskiej we współrzędnych XY. Model matematyczny został zaczerpnięty z [107]. Kąt obrotu między układem lokalnym robota i globalnym oznaczono przez $\varphi(t)$, x_c, y_c to współrzędne środka masy platformy oddalone o odległość d od osi kół. Wielkość b jest szerokością robota, r promieniem koła, a zmienne θ_r, θ_l są kątami obrotu odpowiednio prawego i lewego koła, por. Rys 9.16.



Rysunek 9.16: Dwukołowy robot mobilny w układzie globalnym

Opisując model robota, przyjęto następujące współrzędne konfiguracyjne

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ \varphi \end{bmatrix} \tag{9.44}$$

Równanie dynamiki obiektu w ruchu płaskim (przyjęto, że energia potencjalna nie zmienia się) można opisać w następujący sposób

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{E}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}(t) - \mathbf{A}^T(\mathbf{q}(t))\lambda(t) \tag{9.45}$$

gdzie:

M - macierz mas i bezwładności,

$\mathbf{C}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ - macierz sił odśrodkowych i Coriolisa,
$\boldsymbol{\tau}(t) = [\tau_r(t), \tau_l(t)]^T$ - wektor momentów wejściowych,
$\mathbf{A}(\mathbf{q}(t))$ - macierz ograniczeń fazowych,
$\lambda(t)$ - mnożnik Lagrange'a,
$\mathbf{E}(\mathbf{q})$ - macierz wejścia.

Macierz $\mathbf{A}$ opisuje ograniczenia nałożone na ruch robota. Przyjęto następujące ograniczenia: ruch poprzeczny (wzdłóż osi kół) jest zabroniony oraz nie występuje poślizg wzdłóżny (w płaszczyźnie kół).
Zakładając, że $d = 0$ (co oznacza, że odległośc miedzy osiami kół, a środkiem masy jest równa 0) ograniczenia te opisane są przez następujące 3 równania [108]:

$$\dot{y}_c(t)\cos\varphi(t) - \dot{x}_c(t)\sin\varphi(t) = 0, \tag{9.46}$$

$$\dot{x}_c(t)\cos\varphi(t) + \dot{y}_c(t)\sin\varphi(t) + b\dot{\varphi}(t) = r\dot{\theta}_r(t), \tag{9.47}$$

$$\dot{x}_c(t)\cos\varphi(t) + \dot{y}_c(t)\sin\varphi(t) - b\dot{\varphi}(t) = r\dot{\theta}_l(t). \tag{9.48}$$

Dwa z trzech ograniczeń są nieholonomiczne. Odejmując od siebie zależności (9.47) i (9.48) otrzymuje się

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{r(\dot{\theta}_r(t) - \dot{\theta}_l(t))}{2b}. \tag{9.49}$$

Następnie całkując uzyskuje się

$$\varphi(t) = \frac{r(\theta_r(t) - \theta_l(t))}{2b} + \varphi_0. \tag{9.50}$$

Istnieje zatem geometryczna zależność pomiędzy orientacja φ a kątami θ_r i θ_l. Opisuje ona ograniczenie holonomiczne. Pozostawiając pierwsze (9.46) ograniczenie a dodając do siebie dwa ostatnie (9.47,9.48), uzyskuje się dwa nieholonomiczne ograniczenia

$$\begin{aligned} &\dot{y}_c(t)\cos\varphi(t) - \dot{x}_c(t)\sin\varphi(t) = 0, \\ &\dot{x}_c(t)\cos\varphi(t) + \dot{y}_c(t)\sin\varphi(t) - \frac{r(\dot{\theta}_r(t) + \dot{\theta}_l(t))}{2} = 0. \end{aligned} \tag{9.51}$$

Ograniczenia (9.51) można przedstawić w następującej formie Pfaffa

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 & 0 \\ -\cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_{rc} \\ \dot{\theta}_{lc} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{9.52}$$

Z uwagi na przyjętą definicję zmiennych konfiguracyjnych w (9.44), ograniczenie poślizgu wzdłużnego kół w (9.52) nie będzie rozpatrywane. Rozważone zostanie tylko ograniczenie poślizgu poprzecznego, które można zdefiniować jako $\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, gdzie

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) 0 \end{bmatrix}. \tag{9.53}$$

Dalej, można wykazać, że liniowo niezależne kolumny następującej macierzy $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}(t)) = \begin{bmatrix} \cos\varphi(t) & 0 \\ \sin\varphi(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{9.54}$$

rozpinają przestrzeń zerową macierzy $\mathbf{A}$, tj. $\mathbf{A}(\mathbf{q}(t))\mathbf{S}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{0}$.
Stąd można zdefiniować następujące równanie kinematyki

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(\mathbf{q})\mathbf{u}. \tag{9.55}$$

gdzie $\mathbf{u}$ jest wejściem prędkościowym.

Równanie dynamiki (9.45) przedstawia się w postaci zredukowanej zakładając, że więzy kinematyczne są spełnione tożsamościowo. Mnożąc lewostronnie obie strony zależności (9.45), otrzymuje się

$$\mathbf{S}^T(\mathbf{q}(t))\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{S}^T(\mathbf{q}(t))\mathbf{C}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{E}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}. \tag{9.56}$$

W tym przykładzie zakłada się diagonalną postać macierzy mas, tj.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \tag{9.57}$$

gdzie:

m - masa robota,

I - moment bezwładności robota.

Ze względu na umieszczenie środka masy w środku geometrycznym robota $\mathbf{C}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$. Z kolei macierz wejścia $\mathbf{E}(\mathbf{q})$ jest opisana następująco

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\cos(\varphi) & \frac{1}{r}\cos(\varphi) \\ \frac{1}{r}\sin(\varphi) & \frac{1}{r}\sin(\varphi) \\ \frac{b}{2r} & -\frac{b}{2r} \end{bmatrix} \tag{9.58}$$

W tym przykładzie skupiono się na problemie śledzenia trajektorii, dlatego na początek należy zdefiniować błąd śledzenia [109]

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \varphi_d - \varphi \end{bmatrix} = \mathbf{q}_r - \mathbf{q}, \tag{9.59}$$

gdzie $\mathbf{q}_r$ oznacza trajektorię referencyjną.
Różniczkując po czasie $\mathbf{e}$, definiuje się dynamikę błędu śledzenia trajektorii

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(\varphi_r)\mathbf{u}_r - \mathbf{S}(\varphi)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_r)u_{r1} - \cos(\varphi)u_1 \\ \sin(\varphi_r)u_{r1} - \sin(\varphi)u_1 \\ u_{r2} - u_2 \end{bmatrix}. \tag{9.60}$$

Ze względu na silną nieliniowość równania (9.60), błąd śledzenia trajektorii wyraża się w lokalnym układzie współrzędnych robota, co przedstawia poniższy wzór

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{P}^T(\varphi)\mathbf{e}, \qquad \mathbf{P}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.61}$$

Różniczkując (9.61) otrzymuje się następującą dynamikę błędu pomocniczego

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \dot{\mathbf{P}}^T(\varphi)\mathbf{e} + \mathbf{P}^T(\varphi)\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{P}}^T(\varphi)\tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{P}^T(\varphi)\dot{\mathbf{e}}. \tag{9.62}$$

Uwzględniając (9.60) oraz wyznaczając iloczyn macierzy

$$\mathbf{P}^T(\varphi)\mathbf{S}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{9.63}$$

$$\dot{\mathbf{P}}^T(\varphi)\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9.64}$$

$$\mathbf{P}^T(\varphi)\mathbf{S}(\varphi_r) = \begin{bmatrix} \cos\tilde{e}_3 & 0 \\ \sin\tilde{e}_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{9.65}$$

równanie (9.62) można zapisać w postaci

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_2\tilde{\mathbf{e}} + \begin{bmatrix} \cos(\tilde{e}_3) & 0 \\ \sin(\tilde{e}_3) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_r - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \tag{9.66}$$

lub

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \begin{bmatrix} 0 & u_2 & 0 \\ -u_2 & 0 & \mathrm{sinc}(\tilde{e}_3)u_{r1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}} + \begin{bmatrix} \cos(\tilde{e}_3) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_r - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \tag{9.67}$$

przy czym funkcja $\mathrm{sinc}(\tilde{e}_3) = \dfrac{\sin(\tilde{e}_3)}{\tilde{e}_3}$.

Wprowadzając dodatkowy wektor

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{r1}\cos(\tilde{e}_3) - u_1 \\ u_{r2} - u_2 \end{bmatrix} \tag{9.68}$$

otrzymuje się model układu sterowalnego w otoczeniu $\mathbf{w} = 0$ dla $u_{r1} \neq 0$ w następującej formie

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \begin{bmatrix} 0 & u_{r2} - w_2 & 0 \\ w_2 - u_{r2} & 0 & \mathrm{sinc}(\tilde{e}_3)u_{r1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}. \tag{9.69}$$

Aby wprowadzić wejściowy kompensator dynamiczny, przedstawiony w rozdziale 3, kiedy sterowanie $\mathbf{w}$ staje się nowym stanem, należy wyznaczyć pochodną wektora $\mathbf{w}$. Uwzględniając dynamikę robota mobilnego przedstawioną we wzorze (9.45) uzyskuje się

$$\dot{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{e}_3) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_r + \begin{bmatrix} -u_{r1}\mathrm{sinc}(\tilde{e}_3) \\ 0 \end{bmatrix} w_2 - \dot{\mathbf{u}}, \tag{9.70}$$

W tym przykładzie, rozważany jest przypadek szczególny, kiedy to wektor sił Coriolisa jest równy 0, co upraszcza równanie (9.45) do postaci

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}\boldsymbol{\tau}. \tag{9.71}$$

Stosując powyższą zależność, możliwe jest doprowadzenie równania (9.70) do postaci

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= w_1\dot{u}_r + \begin{bmatrix} -u_{r1}\mathrm{sinc}(\tilde{e}_3) \\ 0 \end{bmatrix} w_2 - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}\boldsymbol{\tau} \\ &= \begin{bmatrix} -u_{r1}\mathrm{sinc}(\tilde{e}_3) \\ 0 \end{bmatrix} w_2 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}\left(-\boldsymbol{\tau} + \mathbf{E}^{-1}\mathbf{M}w_1\dot{\mathbf{u}}_r\right). \end{aligned} \tag{9.72}$$

System z uwzględnieniem wejściowego kompensatora dynamicznego, gdzie $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{e}}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix}$ można wyrazić w sposób

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} 0 & u_{r2} - w_2 & 0 & 1 & 0 \\ w_2 - u_{r2} & 0 & u_{r1}\mathrm{sinc}(\tilde{e}_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u_{r1}\sin(\tilde{e}_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}\tilde{\boldsymbol{\tau}}. \tag{9.73}$$

gdzie:

$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = -\boldsymbol{\tau} + \mathbf{E}^{-1}\mathbf{M}w_1\dot{\mathbf{u}}_r$. Mając powyższą postać układu, można dokonać dekompozycji macierzy $\mathbf{A}$ wyznaczając z niej sumę dwóch macierzy, zależnej oraz niezależnej od stanu

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & u_{r2} - w_2 & 0 & 1 & 0 \\ w_2 - u_{r2} & 0 & u_{r1}(-1 + \mathrm{sinc}(\tilde{e}_3)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u_{r1}\sin(\tilde{e}_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}\boldsymbol{\tau}. \tag{9.74}$$

W badaniach symulacyjnych macierze $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ przyjęto jako

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}. \tag{9.75}$$

Wartości poszczególnych parametrów wykorzystanych podczas modelowania obiektu dla nieskończonego horyzontu czasowego zestawiono w poniższej tabeli

Zmienna	Wartość	Jednostka
d	0	m
r	0.05	m
b	0.245	m
m	1	kg
I	0.01	kgm^2

Tablica 9.9: Parametry robota mobilnego

Stan początkowy dla robota mobilnego rozważony podczas symulacji

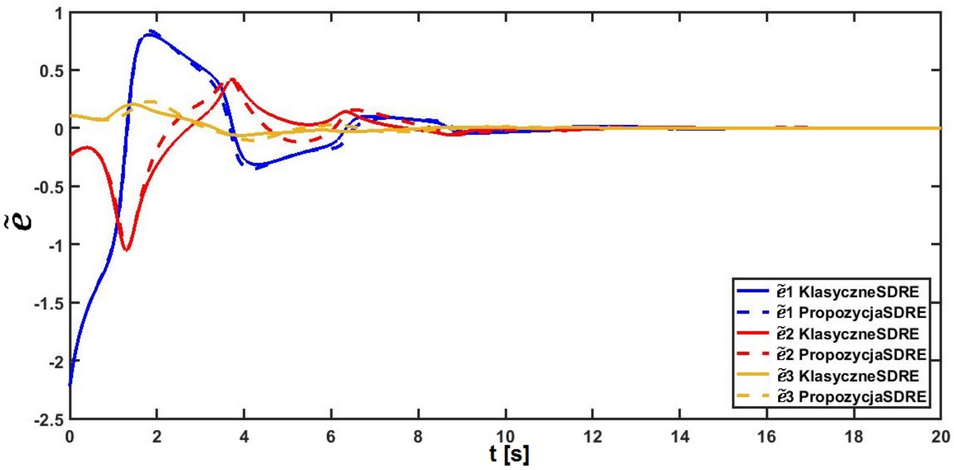
$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m} \\ \mathrm{m} \\ \mathrm{rad} \\ \mathrm{Nm} \\ \mathrm{Nm} \end{bmatrix}. \tag{9.76}$$

Trajektoria zadana to krzywa Lissajous o parametrach $x_r = r\sin(\frac{2\pi}{10})$, $y_r = r\kappa\sin(\frac{2\pi}{20})$, gdzie $r = R_a\cos(\frac{2\pi}{10}t) + R_0, R_a = 0, R_0 = 2, \kappa = 1$. Podstawowe parametry czasowe przyjęte w symulacji obejmują: czas symulacji $20s$ oraz krok czasowy $1 \cdot 10^{-4}s$.

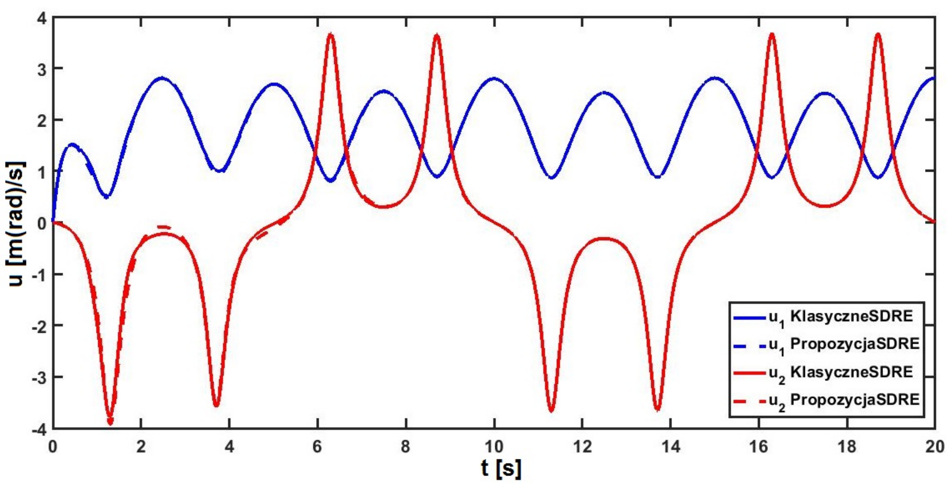
Porównanie czasów wykonania symulacji dla obu metod	
klasyczna metoda SDRE	217.019218s
proponowana metoda SDRE	**49.531248s**

Tablica 9.10: Czasy wykonania symulacji

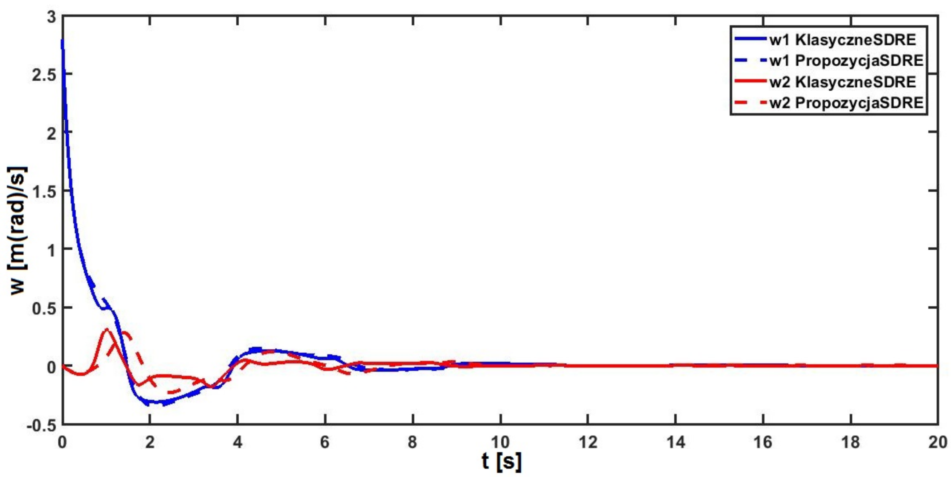
Porównanie czasów wykonania zadania sterowania dla klasycznej i proponowanej metody SDRE, przedstawione powyżej dowodzi, że wprowadzenie zmian w strukturze macierzy kompensatora w sprzężeniu zwrotnym, a także linearyzacja, pozwala zmniejszyć złożoność obliczeniową i znacząco skrócić czas symulacji.



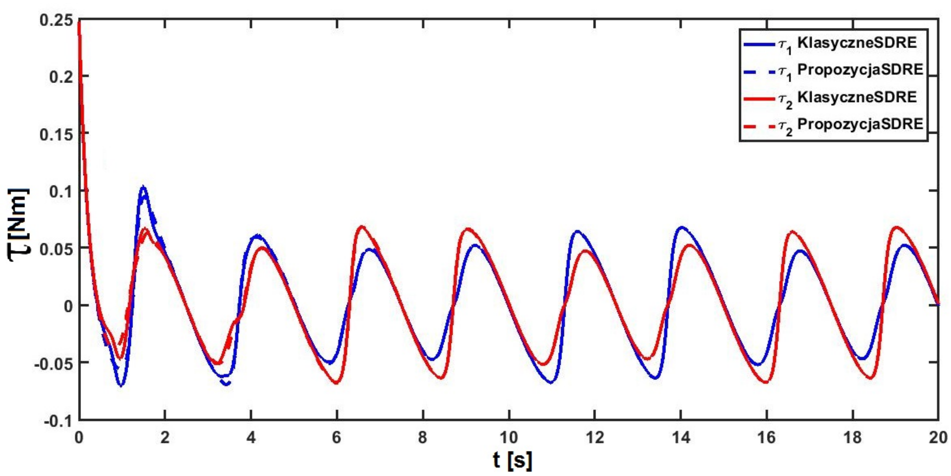
Rysunek 9.17: Porównanie przebiegów błędów śledzenia trajektorii w układzie lokalnym



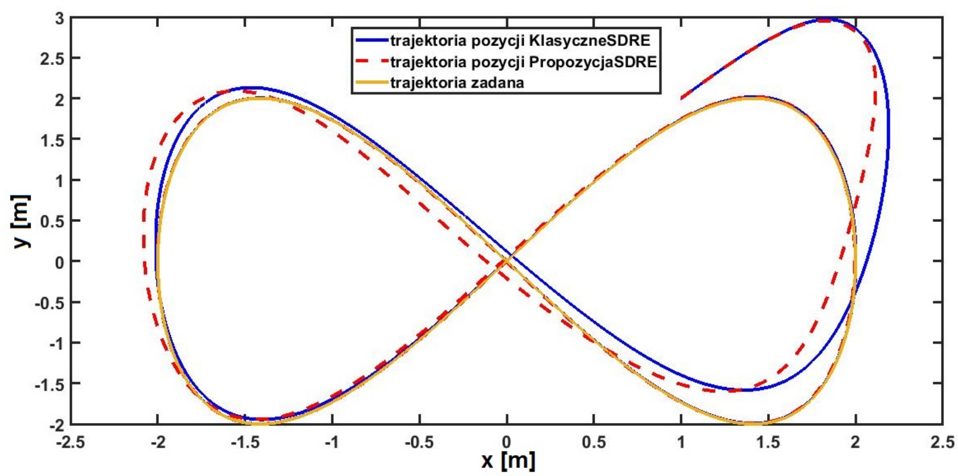
Rysunek 9.18: Porównanie przebiegów prędkości



Rysunek 9.19: Porównanie przebiegów błędów prędkości



Rysunek 9.20: Porównanie przebiegów momentów wejściowych

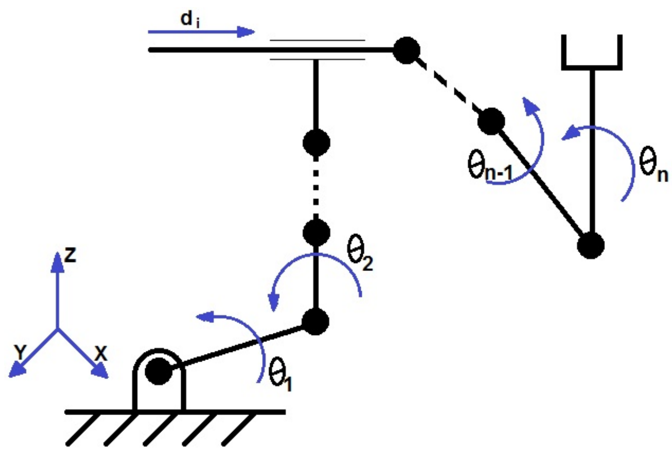


Rysunek 9.21: Porównanie trajektorii

Przebiegi przedstawione na powyższych rysunkach praktycznie się pokrywają. Błędy zbiegają do zera, zaś trajektoria jest dobrze odwzorowana. Czas wykonania zadania dla zmodyfikowanej metody jest ponad cztery razy krótszy, co sprawia że metoda ta jest znacznie mniej wymagająca obliczeniowo od klasycznego podejścia.

9.1.6 Sterowanie manipulatorem

Poniższy rozdział dotyczy zastosowania sterowania SDRE w przypadku manipulatora. W poniższym przykładzie przedstawiono manipulator o sztywnych złączach i 6 stopniach swobody, przy czym rozważone zadanie uwzględnia tylko 3 stopnie swobody [102, 110]. Poniżej przedstawiono schemat dla manipulatora o sztywnych n-złączach.



Rysunek 9.22: Schemat ogólny dla manipulatora o n-złączach

W celu zdefiniowania kinematyki manipulatora skorzystano ze zmodyfikowanej notacji Denavita-Hartenberga (ZDH) w celu określenia położeń i orientacji poszczególnych złącz, por. Tab. 9.12

Złącze	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	q_1	0	0	0.698
2	$q_2 - \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	a_{i-1}	0
3	q_3	0	0.125	0
4	0	0	0.248	0

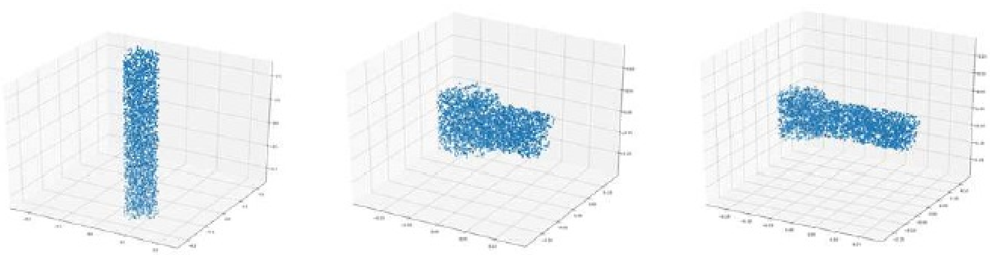
Tablica 9.11: Parametry złączy dla kolejnych stopni swobody

W Tab. 9.12 określono wartości parametrów wymaganych do wyznaczenia równania dynamiki układu z użyciem metody Lagrange'a.

Złącze	Masa[kg]	Współ. śr. masy złącza [m]			Mom. bezwł. złącza [N]		
		C_x	C_y	C_z	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
1	12.55	0	0	-0.344	0.55	0.55	0.016
2	3.39	0.033	0	0	0.022	0.044	0.038
3	6.36	0.091	0	0	0.019	0.11	0.107

Tablica 9.12: Zmodyfikowana notacja Denavita- Hartenberga dla 3 stopni swobody

Przyjęto, że każde ze złączy robota reprezentowane jest przez jednolite walcowe bryły wykonane z aluminium i na tej podstawie dokonano przybliżonych obliczeń masy i momentów bezwładności. Dla $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ ramię robota z efektorem ustawione jest pionowo w górę.



Rysunek 9.23: Zbiór punktów do estymacji masy

Model dynamiki jest następującej postaci

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \tag{9.77}$$

gdzie:
$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ - macierz bezwładności,
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ - macierz sił odśrodkowych i Coriolisa,
$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3}$ - wektor sił grawitacji,
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{3}$ - wektor sterowań.

Wektor stanu określono następująco

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_1 \end{bmatrix} \tag{9.78}$$

przy czym $\mathbf{x}_1$ reprezentuje położenia kątowe przegubów robota, zaś $\mathbf{x}_2$ określa ich prędkości.

Mając powyższe na uwadze, dynamika (9.77) może być wyrażona za pomocą następujących równań stanu

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 + \mathbf{M}(\mathbf{x}_1)^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{M}(\mathbf{x}_1)^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{x}_1). \end{cases} \tag{9.79}$$

Stosując poniższe podstawienie

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}_1) = -\mathbf{M}(\mathbf{x}_1) \end{cases}. \tag{9.80}$$

do (9.79) uzyskuje się

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{x}_2 + \mathbf{G}(\mathbf{x}_1)(\mathbf{u} - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)) \end{cases}. \tag{9.81}$$

Stosując wymaganą przy metodzie SDRE parametryzację SDC otrzymuje się system w następującej postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{9.82}$$

gdzie

$$\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{9.83}$$

Wprowadzając wejściowy kompensator dynamiczny przedstawiony w rozdziale 3, w układzie sygnał sterujący $\mathbf{u}$ staje się nowym stanem zaś $\mathbf{v}$ nowym sterowaniem. Wprowadzenie tego kompensatora do układu, pozwala na uniezależnienie od stanu macierz sterowań.

Macierze $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ przyjęto jako

$$\mathbf{Q} = 3 \cdot \left[\mathbf{I}_{9\times9}\right], \qquad \mathbf{R} = 1 \cdot \left[\mathbf{I}_{3\times3}\right]. \tag{9.84}$$

Wartości poszczególnych parametrów wykorzystanych podczas modelowania obiektu dla nieskończonego horyzontu czasowego umieszczono w tabeli

Zmienna	Wartość	Jednostka
m_1, m_2, m_3	24.62, 1.67, 4.73	kg
K_1, K_2, K_3	850, 1200, 500	Nm/rad
J_1, J_2, J_3	0.85, 0.85, 0.005	kgm^2
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	1.32, 0.73, 0.9	rad/s
τ_1, τ_2, τ_3	114, 328.2, 40.4	Nm

Tablica 9.13: Parametry manipulatora

Stan początkowy manipulatora założony podczas symulacji wynosi

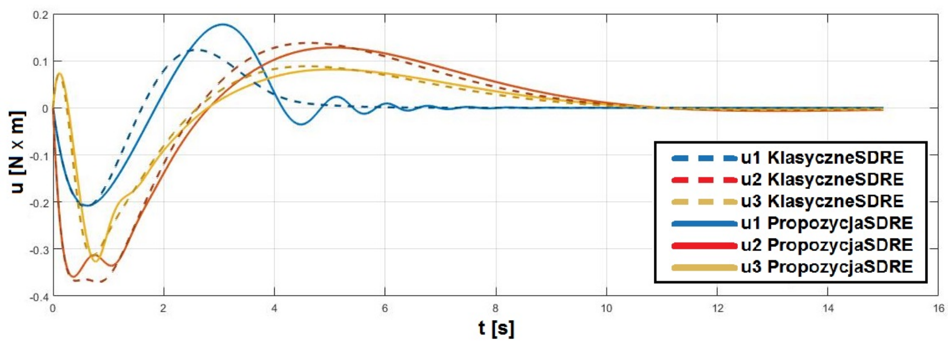
$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ \pi/2 \\ \pi/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{rad} \\ \text{rad} \\ \text{rad} \\ \text{rad/s} \\ \text{rad/s} \\ \text{rad/s} \\ \text{Nm} \\ \text{Nm} \\ \text{Nm} \end{bmatrix}. \tag{9.85}$$

Parametry dotyczące czasu wykonania zadania to odpowiednio czas symulacji $15s$ oraz krok czasowy $5 \cdot 10^{-3}s$.

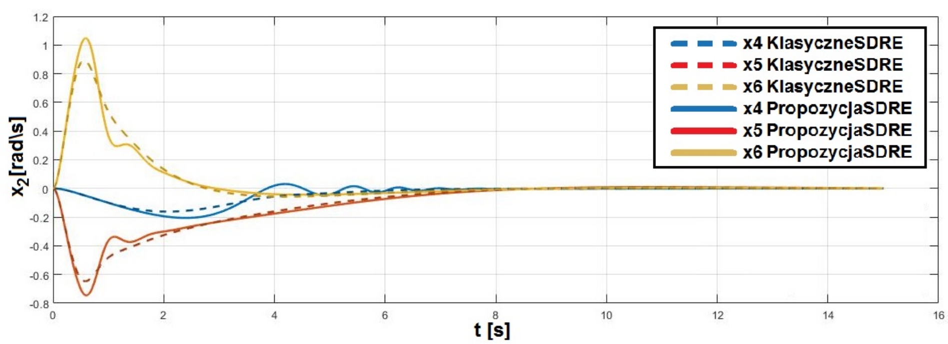
Porównanie czasów wykonania symulacji dla obu metod	
klasyczna metoda SDRE	2.9340s
proponowana metoda SDRE	**0.3997s**

Tablica 9.14: Czasy wykonania symulacji

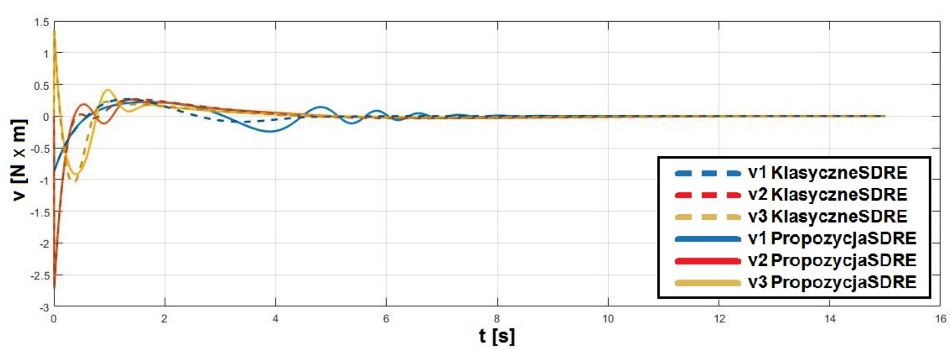
Porównanie czasów wykonania zadania sterowania dla klasycznej i proponowanej metody SDRE, przedstawione powyżej dowodzi, że wprowadzenie zmian w strukturze macierzy kompensatora w sprzężeniu zwrotnym, a także linearyzacja, pozwala zmniejszyć złożoność obliczeniową i znacząco skrócić czas symulacji o ponad 80%.



Rysunek 9.24: Porównanie przebiegów stanów



Rysunek 9.25: Porównanie przebiegów prędkości



Rysunek 9.26: Porównanie przebiegów sterowań

Wyniki symulacji przedstawiające porównanie obu metod zawierają powyższe rysunki. Zarówno, jeśli chodzi o porównanie przebiegów stanów

(Rys. 9.78), prędkości (Rys. 9.25), czy sterowań (Rys. 9.26), mierzone wartości zbiegają do zera wykazując drobne różnice w poszczególnych przebiegach. Uzysk widoczny w czasie wykonania sterowania, jest ponad siedmiokrotnie mniejszy, co po raz kolejny potwierdza, że metoda zmodyfikowana wymaga znacznie mniejszego nakładu obliczeniowego, nie pogarszając jakości sterowania.

Rozdział 10

Podsumowanie i wnioski

Celem pracy była analiza ogólnie znanej metody sterowania suboptymalnego SDRE dla układów nieliniowych oraz modyfikacja tej metody, która polegała na wprowadzeniu zmian w nieliniowym zapisie układu sterowania, a w szczególności w strukturze kompensatora w sprzężeniu zwrotnym. Linearyzacja układu zamkniętego pozwoliła na redukcję równania Riccatiego, którego rozwiązaniem są współczynniki macierzy kompensatora, a tym samym na zmniejszenie nakładu i czasu obliczeń samego równania.

Postawiona na początku teza została potwierdzona zarówno poprzez dowody teoretyczne, jak i symulacje komputerowe wykorzystujące sześć różnych modeli nieliniowych obiektów: silnika krokowego, quadrotora, aktuatora o jednym stopniu swobody, oscylatora Van der Pola, robota mobilnego i manipulatora.

Wykorzystanie pseudoinwersji Moore'a-Penrose'a do linearyzacji równań stanu układu zamkniętego w proponowanej metodzie SDRE dało możliwość poprawy efektywności algorytmu wyznaczania sterowania suboptymalnego. Zaproponowano parametryzację SDC, a także wejściowy kompensator dynamiczny pozwalający na przejście z systemów nieafinicznych do afinicznych umożliwiające stosowanie badanej metody. Opracowano dowody stabilności dla proponowanego podejścia. Przedstawione rozważania dotyczące zarówno klasycznej metody SDRE, jak i nowej propozycji oraz sformułowane dowody stabilności dotyczą zagadnień sterowania ze skończonym jak i z nieskończonym horyzontem czasowym.

W przypadku nieskończonego horyzontu czasowego dowiedziono, że istnieje możliwość redukcji nakładu obliczeniowego w celu znalezienia rozwiązania równania Riccatiego, sprowadzając je do jednorazowego obliczenia macierzy wzmocnień w całym procesie sterowania.

Dla sterowania ze skończonym horyzontem czasowym, rozwiązanie równania Riccatiego obliczane jest dla czasowo zależnych wzmocnień kompensatora w sprzężeniu zwrotnym – tak jak w zagadnieniach sterowania optymalnego LQR.

Badania wykazały, że możliwe jest uniezależnienie od stanu równania Riccatiego zarówno w przypadku ze skończonym, jak i nieskończonym horyzontem czasowym, a także sprowadzenie rozwiązania nieliniowego problemu sterowania do rozwiązania problemu LQR. Wyznaczono nowe warunki suboptymalności rozwiązania, wprowadzono dwa nowe kompensatory w sprzężeniu zwrotnym, a także przedstawiono analizę stabilności asymptotycznej lokalnej oraz globalnej. Wszystko to w konsekwencji pozwoliło uprościć proces wyznaczania rozwiązania, zmniejszyć nakład obliczeniowy i znacząco zmniejszyć czas wykonywania operacji. Różnice dotyczące długości wykonywanych symulacji procesów sterowania widoczne są zarówno w problemach skończonego, jak i nieskończonego horyzontu czasowego.

Wyniki uzyskane podczas procesu symulacji pozwalają stwierdzić, że opracowana metoda dzięki małej wrażliwości pozwala na uzyskanie prawie identycznych wyników jak metoda klasyczna. Podczas badań zauważono, że istotne dla procesu sterowania jest odpowiednie dobranie macierzy wag, najlepiej zgodnie z fizyką zjawisk, co leży w gestii projektanta. Największym problemem podczas procesu symulacji okazał się dobór odpowiedniej parametryzacji zapewniający możliwość sterowania układem. Na podstawie analizy przypadków odnotowano maksymalnie ponad ośmiokrotną redukcję złożoności obliczeniowej i skrócenie czasu symulacji. Powyższe wnioski potwierdzają prawdziwość tezy postawionej na początku rozprawy.

Istnieją dalsze możliwości rozwoju i kolejnych badań, które mogą dotyczyć sprawdzenia wyników możliwych do uzyskania, gdy macierz sterowań jest zależna od stanu. Do tej pory, tak jak w dostępnej literaturze na temat praktycznych zastosowań metody skupiano się tylko na macierzy o stałych współczynnikach. Wydaje się, że rozważanie możliwych modyfikacji metody dla macierzy wejścia zależnej od stanu może doprowadzić do zaproponowania jeszcze bardziej uniwersalnej metody. Możliwe jest także przeprowadzenie eksperymentalnej weryfikacji algorytmu wykorzystując rzeczywiste układy sterowania takie jak, np. dron czy dwukołowy robot mobilny.

Przedstawiona praca nie wyczerpuje możliwych badań nad przyspieszeniem metody sterowania SDRE czy poprawą jej efektywności. Stanowi jednak, zdaniem autorki, istotny materiał badawczy pokazujący możliwości uproszczenia metody pod kątem implementacji i nakładu obliczeniowego w systemach rzeczywistych.

Bibliografia

[1] R. Bellman, I. Glicksberg, and O. Gross, "On the "bang-bang" control problem," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 14, no. 1, pp. 11–18, 1956.

[2] D. Bushaw, "Optimal discontinuous forcing terms," *contributions to the theory of nonlinear oscillations*, vol. 4, pp. 29–52, 1958.

[3] J. LaSalle, "Basic principle of the bang-bang servo," in *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 60, no. 2. AMER MATHEMATICAL SOC 201 CHARLES ST, PROVIDENCE, RI 02940-2213, 1954, pp. 154–154.

[4] Z. Hu, L. Guo, S. Wei, and Q. Liao, "Design of lqr and pid controllers for the self balancing unicycle robot," in *2014 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA)*. IEEE, 2014, pp. 972–977.

[5] B. D. Anderson and J. B. Moore, *Optimal control: linear quadratic methods*. Courier Corporation, 2007.

[6] S. J. Underwood and I. Husain, "Online parameter estimation and adaptive control of permanent-magnet synchronous machines," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 57, no. 7, pp. 2435–2443, 2009.

[7] M. Galicki, "An adaptive non-linear constraint control of mobile manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 88, pp. 63–85, 2015.

[8] A. Mazur, "Hybrid adaptive control laws solving a path following problem for non-holonomic mobile manipulators," *International Journal of Control*, vol. 77, no. 15, pp. 1297–1306, 2004.

[9] J.-J. E. Slotine, “Sliding controller design for non-linear systems,” *International Journal of control*, vol. 40, no. 2, pp. 421–434, 1984.

[10] M. Galicki, “Optimal cascaded control of mobile manipulators,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 96, no. 2, pp. 1367–1389, 2019.

[11] K. Zhang, B. Jiang, and M. Staroswiecki, “Dynamic output feedback-fault tolerant controller design for takagi–sugeno fuzzy systems with actuator faults,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 18, no. 1, pp. 194–201, 2009.

[12] Z. K. Nagy and R. D. Braatz, “Open-loop and closed-loop robust optimal control of batch processes using distributional and worst-case analysis,” *Journal of process control*, vol. 14, no. 4, pp. 411–422, 2004.

[13] T. Takagi and M. Sugeno, “Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control,” in *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*. Elsevier, 1993, pp. 387–403.

[14] F. F. El-Sousy, “Hybrid h_∞-based wavelet-neural-network tracking control for permanent-magnet synchronous motor servo drives,” *IEEE Transactions on industrial electronics*, vol. 57, no. 9, pp. 3157–3166, 2009.

[15] S. J. Qin and T. A. Badgwell, “A survey of industrial model predictive control technology,” *Control engineering practice*, vol. 11, no. 7, pp. 733–764, 2003.

[16] M. A. Henson and D. E. Seborg, *Nonlinear process control*. Prentice Hall PTR Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

[17] I. Gelfand and S. Fomin, “Calculus of variations prentice-hall,” *Englewood Cliffs, NJ*, 1963.

[18] J. T. Betts, “Survey of numerical methods for trajectory optimization,” *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 21, no. 2, pp. 193–207, 1998.

[19] S. Jin and S. Osher, “A level set method for the computation of multivalued solutions to quasi-linear hyperbolic pde’s and hamilton-jacobi equations,” *Communications in Mathematical Sciences*, vol. 1, no. 3, pp. 575–591, 2003.

[20] J. Pearson, "Approximation methods in optimal control i. sub-optimal control," *International Journal of Electronics*, vol. 13, no. 5, pp. 453–469, 1962.

[21] J. Burghart, "A technique for suboptimal feedback control of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 14, no. 5, pp. 530–533, 1969.

[22] W. Garrard, "Suboptimal feedback control for nonlinear systems," *Automatica*, vol. 8, no. 2, pp. 219–221, 1972.

[23] A. Wernli and G. Cook, "Suboptimal control for the nonlinear quadratic regulator problem," *Automatica*, vol. 11, no. 1, pp. 75–84, 1975.

[24] J. R. Cloutier, "State-dependent riccati equation techniques: an overview," in *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No. 97CH36041)*, vol. 2. IEEE, 1997, pp. 932–936.

[25] C. P. Mracek and J. R. Cloutier, "Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent riccati equation method," *International Journal of robust and nonlinear control*, vol. 8, no. 4-5, pp. 401–433, 1998.

[26] D. T. Stansbery and J. R. Cloutier, "Position and attitude control of a spacecraft using the state-dependent riccati equation technique," in *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No. 00CH36334)*, vol. 3. IEEE, 2000, pp. 1867–1871.

[27] T. Çimen, "State-dependent riccati equation (sdre) control: A survey," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 41, no. 2, pp. 3761–3775, 2008.

[28] T. Cimen, "Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent riccati equation (sdre) method," *Annual Reviews in control*, vol. 34, no. 1, pp. 32–51, 2010.

[29] S. Elloumi and N. Benhadj Braiek, "On feedback control techniques of nonlinear analytic systems," *Journal of applied research and technology*, vol. 12, no. 3, pp. 500–513, 2014.

[30] Z. Qu and J. R. Cloutier, "A new suboptimal control design for cascaded non-linear systems," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 23, no. 6, pp. 303–328, 2002.

[31] J. Bernat, J. Kołota, S. Stępień, and P. Superczyńska, "Suboptimal control of nonlinear continuous- time locally positive systems using input-state linearization and sdre approach," *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, vol. 66, no. 1, 2018.

[32] J. R. Cloutier, C. N. D'Souza, and C. P. Mracek, "Nonlinear regulation and nonlinear h_∞ control via the state-dependent riccati equation technique: Part 1, theory," in *Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace.* Embry-Riddle Aeronautical Univ. Press Daytona Beach, FL, 1996, pp. 117–130.

[33] Y.-W. Liang and L.-G. Lin, "On factorization of the nonlinear drift term for sdre approach," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, no. 1, pp. 9607–9612, 2011.

[34] L.-G. Lin, J. Vandewalle, and Y.-W. Liang, "Analytical representation of the state-dependent coefficients in the sdre/sddre scheme for multivariable systems," *Automatica*, vol. 59, pp. 106–111, 2015.

[35] Y.-W. Liang and L.-G. Lin, "Analysis of sdc matrices for successfully implementing the sdre scheme," *Automatica*, vol. 49, no. 10, pp. 3120–3124, 2013.

[36] D. K. Parrish and D. B. Ridgely, "Control of an artificial human pancreas using the sdre method," in *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No. 97CH36041)*, vol. 2. IEEE, 1997, pp. 1059–1060.

[37] H. Banks, D. Bortz, and S. Holte, "Incorporation of variability into the modeling of viral delays in hiv infection dynamics," *Mathematical biosciences*, vol. 183, no. 1, pp. 63–91, 2003.

[38] S. Alizadeh, A. Adhami, and M. Yazdanpanah, "Optimal control of drug administration in cancer treatment via state-dependent riccati equation (sdre) method," in *Proceedings of the 20 th Iranian conference on electric engineering*, 2012.

[39] N. Babaei and M. U. Salamci, "State dependent riccati equation based model reference adaptive stabilization of nonlinear systems with application to cancer treatment," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 47, no. 3, pp. 1296–1301, 2014.

[40] G. M. Kepler, H. Banks, H. T. Tran, and S. Beeler, "Reduced order modeling and control of thin film growth in an hpcvd reactor," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 62, no. 4, pp. 1251–1280, 2002.

[41] K. R. Kozlowski, *Modelling and identification in robotics*. Springer Science & Business Media, 2012.

[42] E. B. Erdem and A. G. Alleyne, "Experimental real-time sdre control of an underactuated robot," in *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 01CH37228)*, vol. 3. IEEE, 2001, pp. 2986–2991.

[43] J. M. Renno, W. Yim, and S. N. Singh, "End point position control of multi-link flexible manipulators using sdre method," in *ASME 2004 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers, 2004, pp. 21–28.

[44] A. Molter, O. A. A. Da Silveira, J. S. O. Fonseca, and V. Bottega, "Simultaneous piezoelectric actuator and sensor placement optimization and control design of manipulators with flexible links using sdre method," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2010, 2010.

[45] A. Fenili and J. M. Balthazar, "The rigid-flexible nonlinear robotic manipulator: Modeling and control," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, no. 5, pp. 2332–2341, 2011.

[46] J. Bernat, S. J. Stepien, A. Stranz, and P. Superczynska, "Linear quadratic-based optimal current control of bldc motor minimizing control error and considering accurate finite element model," *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, vol. 35, no. 6, pp. 2063–2073, 2016.

[47] ——, "Infinite-time linear–quadratic optimal control of the bldc motor exploiting a nonlinear finite element model," *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, vol. 36, no. 3, pp. 633–648, 2017.

[48] M. Sznaier, J. Cloutier, R. Hull, D. Jacques, and C. Mracek, "A receding horizon state dependent riccati equation approach to suboptimal regulation of nonlinear systems," in *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 98CH36171)*, vol. 2. IEEE, 1998, pp. 1792–1797.

[49] E. Erdem and A. G. Alleyne, "Globally stabilizing second order nonlinear systems by sdre control," in *Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251)*, vol. 4. IEEE, 1999, pp. 2501–2505.

[50] J. Pittner and M. A. Simaan, "A useful control model for tandem hot metal strip rolling," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 46, no. 6, pp. 2251–2258, 2010.

[51] I. Chang, S.-Y. Park, and K.-H. Choi, "Nonlinear attitude control of a tether-connected multi-satellite in three-dimensional space," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 46, no. 4, pp. 1950–1968, 2010.

[52] A. Bogdanov and E. Wan, "Sdre control with nonlinear feedforward compensation for a small unmanned helicopter," in *2nd AIAA"Unmanned UnlimitedĆonf. and Workshop & Exhibit*, 2003, p. 6512.

[53] S. M. Esmailifar and F. Saghafi, "Autonomous unmanned helicopter landing system design for safe touchdown on 6dof moving platform," in *2009 Fifth International Conference on Autonomic and Autonomous Systems*. IEEE, 2009, pp. 245–250.

[54] R. Guo, A. Wu, Z. Lang, and X. Zhang, "A nonlinear attitude control method for an unmanned helicopter," in *2010 2nd International Asia Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (CAR 2010)*, vol. 1. IEEE, 2010, pp. 166–169.

[55] T. D. Do, H. H. Choi, and J.-W. Jung, "Sdre-based near optimal control system design for pm synchronous motor," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 59, no. 11, pp. 4063–4074, 2011.

[56] L. Zhong, M. F. Rahman, W. Y. Hu, and K. Lim, "Analysis of direct torque control in permanent magnet synchronous motor drives," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 12, no. 3, pp. 528–536, 1997.

[57] K. A. Wise and J. L. Sedwick, "Nonlinear control of agile missiles using state dependent riccati equations," in *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No. 97CH36041)*, vol. 1. IEEE, 1997, pp. 379–380.

[58] T. Kaczorek, A. Dzieliński, W. Dąbrowski, and R. Łopatka, *Podstawy teorii sterowania*. Wydawnictwo WNT, 2014.

[59] A. Heydari and S. Balakrishnan, "Closed-form solution to finite-horizon suboptimal control of nonlinear systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 25, no. 15, pp. 2687–2704, 2015.

[60] B. Friedland, *Advanced control system design.* Prentice-Hall, Inc., 1995.

[61] M. Vidyasagar, *Nonlinear systems analysis.* Siam, 2002, vol. 42.

[62] R. W. Bass, "rho-synthesis: a'rhobustness' margin for unstructured nonlinear and time-varying deviations," in *[1991] Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control.* IEEE, 1991, pp. 2531–2537.

[63] W. Langson and A. Alleyne, "Infinite horizon optimal control of a class of nonlinear systems," in *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No. 97CH36041)*, vol. 5. IEEE, 1997, pp. 3017–3022.

[64] H. Banks, B. Lewis, and H. T. Tran, "Nonlinear feedback controllers and compensators: a state-dependent riccati equation approach," *Computational Optimization and Applications*, vol. 37, no. 2, pp. 177–218, 2007.

[65] V. Boltyanski, "Sufficient conditions for lagrange, mayer, and bolza optimization problems," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 7, no. 2, pp. 177–203, 2001.

[66] D. Liberzon, *Calculus of variations and optimal control theory: a concise introduction.* Princeton University Press, 2011.

[67] S. M. Aseev and A. V. Kryazhimskiy, "The pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 43, no. 3, pp. 1094–1119, 2004.

[68] J. Bernat, S. Stepien, and P. Superczynska, "Infinite-time optimal control of nonlinear continuous-time systems with nonlinear feedback gains," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 11, pp. 264–267, 2015.

[69] F. Brauer and J. A. Nohel, *The qualitative theory of ordinary differential equations: an introduction.* Courier Corporation, 2012.

[70] T. Kaczorek, "Minimum energy control of positive continuous- time linear systems with bounded inputs," *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 23, no. 4, pp. 725–730, 2013.

[71] M. Weickgenannt, N. Zimmert, S. Klumpp, and O. Sawodny, "Application of sdre control to servopneumatic drives," in *2010 IEEE International Conference on Control Applications.* IEEE, 2010, pp. 1725–1730.

[72] R. Guo and J. Chen, "Sdre attitude control with global asymptotic stability for an unmanned helicopter," in *Proceedings 2011 International Conference on Transportation, Mechanical, and Electrical Engineering (TMEE).* IEEE, 2011, pp. 1044–1049.

[73] R. Guo, A. Wu, and X. Zhang, "Improved sdre control for an unmanned helicopter based on multi-timescale dynamics model," in *2010 8th World Congress on Intelligent Control and Automation.* IEEE, 2010, pp. 2476–2481.

[74] S. Jing-Liang, L. Chun-Sheng, L. Ke, and S. Hao-Ming, "Optimal robust control for attitude of quad-rotor aircraft based on sdre," in *2015 34th Chinese Control Conference (CCC).* IEEE, 2015, pp. 2333–2337.

[75] K. Shihabudheen, J. Thankachan, and C. Vasista, "Sdre control of flexible beam manipulator," in *2015 International Conference on Soft Computing Techniques and Implementations (ICSCTI).* IEEE, 2015, pp. 148–154.

[76] K. A. Roudkenary, H. Khaloozadeh, and A. K. Sedigh, "Sdre control of non-affine systems," in *2016 4th International Conference on Control, Instrumentation, and Automation (ICCIA).* IEEE, 2016, pp. 239–244.

[77] M. Itik, M. U. Salamci, and S. P. Banks, "Sdre optimal control of drug administration in cancer treatment," *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, vol. 18, no. 5, pp. 715–730, 2010.

[78] H. Voos, "Nonlinear state-dependent riccati equation control of a quadrotor uav," in *2006 IEEE Conference on Computer Aided Control*

System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control. IEEE, 2006, pp. 2547–2552.

[79] H. W. Knobloch and H. Kwakernaak, *Lineare Kontrolltheorie.* Springer-Verlag, 2013.

[80] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear optimal control systems.* Wiley-interscience New York, 1972, vol. 1.

[81] M. D. Canon, C. D. Cullum, and E. Polak, *Sterowanie optymalne i programowanie matematyczne.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1975.

[82] A. A. Fel'dbaum, *Podstawy teorii optymalnych układów sterowania automatycznego.* Państwowe Wydawnictwa Techniczne, 1967.

[83] R. T. Rockafellar, "Lagrange multipliers and optimality," *SIAM review*, vol. 35, no. 2, pp. 183–238, 1993.

[84] D. L. Lukes, "Optimal regulation of nonlinear dynamical systems," *SIAM Journal on Control*, vol. 7, no. 1, pp. 75–100, 1969.

[85] A. J. van der Schaft, "On a state space approach to nonlinear h_∞ control," *Systems & Control Letters*, vol. 16, no. 1, pp. 1–8, 1991.

[86] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-space solutions to standard h_2 and h_infty control problems," *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 34, no. 8, pp. 831–847, 1989.

[87] M. V. Day, "On lagrange manifolds and viscosity solutions," *Journal of Mathematical Systems Estimation and Control*, vol. 8, pp. 369–372, 1998.

[88] J. R. Cloutier, D. T. Stansbery, and M. Sznaier, "On the recoverability of nonlinear state feedback laws by extended linearization control techniques," in *Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251)*, vol. 3. IEEE, 1999, pp. 1515–1519.

[89] C. D. Meyer, Jr, "Generalized inversion of modified matrices," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 24, no. 3, pp. 315–323, 1973.

[90] J. C. A. Barata and M. S. Hussein, "The moore–penrose pseudoinverse: A tutorial review of the theory," *Brazilian Journal of Physics*, vol. 42, no. 1-2, pp. 146–165, 2012.

[91] D. Adhyaru, I. Kar, and M. Gopal, "Fixed final time optimal control approach for bounded robust controller design using hamilton–jacobi–bellman solution," *IET control theory & applications*, vol. 3, no. 9, pp. 1183–1195, 2009.

[92] J. Markman and I. N. Katz, "An iterative algorithm for solving hamilton–jacobi type equations," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 22, no. 1, pp. 312–329, 2000.

[93] S. C. Beeler *et al.*, "Modeling and control of thin film growth in a chemical vapor deposition reactor," 2000.

[94] D. Kleinman, "On an iterative technique for riccati equation computations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 13, no. 1, pp. 114–115, 1968.

[95] S. Katsev, "Streamlining of the state-dependent riccati equation controller algorithm for an embedded implementation," 2006.

[96] N. R. Sandell Jr, "On newton's method for riccati equation solution," 1974.

[97] N. Wong, V. Balakrishnan, C.-K. Koh, and T.-S. Ng, "A fast newton/smith algorithm for solving algebraic riccati equations and its application in model order reduction," in *2004 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 5. IEEE, 2004, pp. V–53.

[98] P. Benner and R. Byers, "An exact line search method for solving generalized continuous-time algebraic riccati equations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 1, pp. 101–107, 1998.

[99] A. Laub, "A schur method for solving algebraic riccati equations," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 24, no. 6, pp. 913–921, 1979.

[100] C. Jaganath, A. Ridley, and D. S. Bernstein, "A sdre-based asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems," in *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005.* IEEE, 2005, pp. 3630–3635.

[101] M. Korayem, S. Nekoo, and A. Korayem, "Finite time sdre control design for mobile robots with differential wheels," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 30, no. 9, pp. 4353–4361, 2016.

[102] M. Korayem and S. Nekoo, “Finite-time state-dependent riccati equation for time-varying nonaffine systems: Rigid and flexible joint manipulator control,” *ISA transactions*, vol. 54, pp. 125–144, 2015.

[103] W. F. Arnold and A. J. Laub, “Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic riccati equations,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 72, no. 12, pp. 1746–1754, 1984.

[104] S. E. Lyshevski, *Electromechanical systems, electric machines, and applied mechatronics.* CRC press, 2018.

[105] S. J. Stepien, P. Superczynska, D. Dobrowolski, and J. Dobrowolski, “Sdre-based high performance feedback control for nonlinear mechatronic systems,” *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 2019.

[106] “Linak LA36 nota katalogowa,” https://www.linak.pl/produkty/si%C5%82owniki-liniowe/la36/.htm.

[107] P. Dutkiewicz, M. Kiełczewski, K. Kozłowski, and D. Pazderski, “Vision localization system for mobile robot with velocities and acceleration estimator,” *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, vol. 58, no. 1, pp. 29–41, 2010.

[108] Y. Yamamoto and X. Yun, “Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator,” in *[1992] Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control.* IEEE, 1992, pp. 2643–2648.

[109] M. Michałek and D. Pazderski, “Sterowanie robotów mobilnych,” *Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej*, pp. 67–72, 2012.

[110] P. Superczyńska, S. Stepień, O. Lindenau, and M. Walesa, “Sdre-based suboptimal controller for manipulator control,” in *2019 12th International Workshop on Robot Motion and Control (RoMoCo).* IEEE, 2019, pp. 21–25.